Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocławski
TEST KWALIFIKACYJNY NA STUDIA DOKTORANCKIE
Wrocław, 18 czerwca 2018.

Zadanie 1. Dana jest k-wymiarowa podprzestrzeń liniowa $V < \mathbb{R}^n$. Uzasadnij, że istnieją takie $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, że jeśli $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest zadane przez $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, to $\pi(V) = \mathbb{R}^k$.

Zadanie 2. Niech d będzie metryką euklidesową na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Przypomnijmy, że odległość punktu $p \in \mathbb{R}^2$ od podzbioru $X \subset \mathbb{R}^2$ definiujemy jako

$$d(p, X) := \inf\{d(p, q) : q \in X\}.$$

Niech $\mathcal{B}$ będzie zbiorem domkniętych ograniczonych i niepustych podzbiorów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Rozważmy funkcję $d_H : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ zadaną przez

$$d_H(A, B) = \sup[\{d(p, B) : p \in A\} \cup \{d(q, A) : q \in B\}].$$

Dla $A \in \mathcal{B}$ i $\varepsilon > 0$ oznaczmy $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} K(x, \varepsilon)$, gdzie $K(x, \varepsilon)$ jest kulą o środku w x i promieniu ε.
(A) Wykaż, że $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon \ i \ B \subset A_\varepsilon\}$.
(B) Uzasadnij, że d_H jest metryką na zbiorze $\mathcal{B}$.
(C) Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ będzie przeliczalnym podzbiorem złożonym z wszystkich skończonych zbiorów $A \subset \mathbb{R}^2$ takich, że każdy punkt z A ma obie współrzędne wymierne:

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R}^2 : \mathrm{card} A < \infty \quad \text{oraz} \quad \forall (x, y) \in A \text{ zachodzi } \ x \in Q \ \text{ i } y \in Q\}.$$

w $\mathbb{R}^2$ Uzasadnij, że $\mathcal{F}$ jest gęstym podzbiorem w przestrzeni metrycznej $(\mathcal{B}, d_H)$.

Zadanie 3.
(A) Uzasadnij, że przekrój dwóch podgrup skończonego indeksu tej samej grupy G jest także podgrupą skończonego indeksu w G.
(B) Uzasadnij, że jeśli $H < G$ jest podgrupą skończonego indeksu, to przekrój jej sprzężeń

$$K := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

jest podgrupą **normalną** skończonego indeksu w G.

Zadanie 4. Znaleźć minimalną odległość między punktami parabol

$$y = x^2 + 1 \ \text{ i } \ x = y^2 + 1.$$

Zadanie 5. Zbadać promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, gdzie $a_n = \int_0^n \exp\left(\frac{t^2}{n}\right) dt$.

Zadanie 6. Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ wszystkie rozwiązania równania

$$y' + cy = e^{-t}$$

mają granicę dla $t \to \infty$?

Zadanie 7. Niech E będzie relacją równoważności na $\mathbb{R}$.

(A) (2pkt) Załóżmy, że istnieje funkcja borelowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka że dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a\,E\,b \iff f(a) = f(b)$. Dowieść, że wtedy istnieje przeliczalna rodzina $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podzbiorów borelowskich $\mathbb{R}$, taka że $a\,E\,b \iff (\forall n)(a \in B_n \iff b \in B_n)$.

(B) (4pkt) Udowodnić twierdzenie odwrotne do powyższego, tzn. jeśli istnieje przeliczalna rodzina $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podzbiorów borelowskich $\mathbb{R}$, taka że $a\,E\,b \iff (\forall n)(a \in B_n \iff b \in B_n)$, to istnieje funkcja borelowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka że dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a\,E\,b \iff f(a) = f(b)$.

Zadanie 8. Powiedzmy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *spolegliwy*, jeżeli przestrzeń $\mathbb{R} \setminus A$ jest homeomorficzna z domkniętym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$.

(A) (1pkt) Sprawdzić, że zbiór liczb naturalnych jest spolegliwy.

(B) (2pkt) Udowodnić, że każdy domknięty podzbiór prostej jest spolegliwy.

(C) (1pkt) Udowodnić, że jeżeli zbiór A jest spolegliwy, to $\mathbb{R} \setminus A$ jest przeliczalną sumą przestrzeni zwartych.

(D) (2pkt) Wykazać, że zbiór liczb wymiernych nie jest spolegliwy.

Zadanie 9. Niech $f_n(x, y) = \cos(nxy)$.

(2pkt) Sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty} \int_P f_n(x, y)\mathrm{d}xy = 0$ dla każdego prostokąta $P = [a, b] \times [c, d]$. Symbol $\int_P f_n(x, y)\mathrm{d}xy = 0$ oznacza całkę Riemanna po prostokącie P z funkcji ciągłej f_n.

(4pkt) Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n \mathrm{d}\lambda_2 = 0$ dla każdego borelowskiego zbioru $B \subset \mathbb{R}^2$ o skończonej płaskiej mierze Lebesgue'a λ_2.

Zadanie 10. Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie z gęstością $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}(x > 0)$.
(2 pkt) a) Wyznacz łączny rozkład wektora losowego $(Y_1, Y_2) = (X_1 - X_2, X_1 + X_2)$.
(2 pkt) b) Wyznacz rozkład Y_1.
(2 pkt) c) Wyznacz rozkład Y_2.

Zadanie 11. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 1.
Definiujemy zmienne losowe $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ oraz $Y_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)$.
(3 pkt) (a) Wyznacz funkcję generującą momenty $M_{Y_n}(t)$ zmiennej losowej Y_n.
(2 pkt) (b) Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t)$.
(1 pkt) (c) Jaki jest asymptotyczny rozkład Y_n?

Zadanie 12. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu
(i) Poissona z parametrem λ, $\lambda > 0$;
(ii) jednostajnego na odcinku $[0, b]$, $b > 0$.
Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji nieznanego parametru.