Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: ogólna

Grzegorz Bilka

O pewnym ideale podzbiorów płaszczyzny

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dr hab Piotra Borodulina-Nadziei

Wrocław 2020

Spis treści

1 Wstęp

W teorii mnogości ideały odzwierciedlają intuicję rodziny zbiorów "małych". Często można spotkać przykłady dualności między ideałem zbiorów miary zero i ideałem zbiorów I kategorii Baire'a. Poza tymi, ideały znajdują zastosowanie w forcingu, dzięki częściowym porządkom jaki można dzięki nim uzyskać. W poniższej pracy badam własności ideału na płaszczyźnie zdefiniowanego przez odniesienia do miary. Zobaczymy jednak, że pojawiają się w nim również zbiory I kategorii. Ciekawe jest, że w odróżnieniu od niezmienności miary czy kategorii zbiorów pod wpływem obrotów, takie przekształcenie może sprawić, że dany zbiór przestanie należeć do naszego ideału. Dokładniej, elementami naszego ideału będą zbiory, których rzut na którąś oś jest miary zero, ale również takie, dla których zbiór sum współrzędnych punktów jest mizerny, co jest treścią twierdzenia 4. W rozdziale 5. zauważymy, że gdyby przeprowadzić taką konstrukcję z użyciem kategorii zamiast miary, otrzymalibyśmy dokładnie zbiory I kategorii na płaszczyźnie. Następnie przeanalizujemy co można uzyskać po uogólnieniu definicji naszego ideału. W rozdziale 7. opiszę wspomniane tu intuicje dzięki algebrom ilorazowym. Pokażę, że algebry generowane przez ideały miary i kategorii zanurzają się regularnie w algebrę uzyskaną z naszego ideału. Jest to o tyle zaskakujące, że definicja której używamy nie odnosi się w żaden sposób do kategorii, zaś algebrę od zbiorów mizernych zanurza się w pochodzącą od miary tak, że jest ona tam nieregularna. Z tych twierdzeń można wywnioskować, że forcing randomem nie dodaje liczby Cohena, ale iteracja dwóch randomów dodaje.

2 Definicje

W niniejszej pracy korzystam z następujących definicji i oznaczeń:

- Przez *płaszczyznę* rozumiem $[0,1]^2$.
- Przypomnijmy, że *ideałem* nazywamy rodzinę zbiorów I zamkniętą na skończone sumy i branie podzbiorów, czyli:
  1. Jeśli $A, B \in I,\ to\ A \cup B \in I.$
  2. Jeśli $A \subseteq B \in I,\ to\ A \in I.$

  Dodatkowo, ideał I nazwiemy σ-ideałem, gdy zachodzi warunek:
  $\forall A_1, ..., A_n, ... \in I\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in I.$
- $\mathcal{N}, \mathcal{N}_2$ - σ-ideały zbiorów miary zero na prostej i płaszczyźnie, odpowiednio.
- $\mathcal{M}, \mathcal{M}_2$ - σ-ideały zbiorów I kategorii Baire'a na prostej i płaszczyźnie, odpowiednio.
- Zbiór $P \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy *prostokątem*, jeżeli jest postaci $A \times B$ dla pewnych $A, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.
- Prostokąt P nazwiemy *niezerowym*, jeżeli $A \notin \mathcal{N}$ oraz $B \notin \mathcal{N}$.
- Niech $\mathcal{D}$ będzie rodziną wszystkich niezerowych prostokątów.
- Dla $f : X \to Y$, wykresem F nazywam $graph(f) = \{\langle x, f(x)\rangle : x \in X\}$.
- Mówimy, że zbiór ma własność Baire'a, jeśli przedstawia się w postaci $U \triangle P$, gdzie U jest otwarty oraz $P \in \mathcal{M}$.
- Rodzinę podzbiorów $\mathbb{R}$ o własności Baire'a, które są II kategorii, będziemy oznaczać Ba_+.

Teraz możemy zdefiniować ideał, który będzie rozważany w tej pracy:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) = \{B \subseteq [0,1]^2 :\ \forall D \in \mathcal{D}\ \exists D' \in \mathcal{D}\ (D' \subseteq D\ \wedge\ D' \cap B = \emptyset)\} \tag{1}$$

Jest to rodzina zbiorów, dla których z każdego niezerowego prostokąta można wybrać niezerowy podprostokąt rozłączny z rozważanym zbiorem.

3 Podstawowe własności

Fakt. $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ *jest ideałem.*

Dowód. Najpierw sprawdzimy zamkniętość na branie podzbiorów.
Weźmy $B' \subseteq B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ oraz $D \in \mathcal{D}$. Wtedy, z definicji, istnieje $D' \subseteq D$ takie, że $D' \cap B = \emptyset$. Ale wtedy również $D' \cap B' = \emptyset$.
Pozostaje sprawdzić zamkniętość na sumy dwóch elementów.
Weźmy dowolne $A, B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ oraz $D \in \mathcal{D}$. Wtedy istnieje $D' \subseteq D$ takie, że $D' \cap A = \emptyset$. Ale skoro $D' \in \mathcal{D}$, to istnieje $D'' \subseteq D'$ rozłączne z B. Zauważmy, że D'' jest szukanym podprostokątem D, jest bowiem rozłączny z $A \cup B$. □

Spróbujmy teraz zobaczyć, z jakich zbiorów składa się nasz ideał. Przede wszystkim zawiera on wszystkie zbiory jednoelementowe, bo wykluczając współrzędne tego elementu ze składowych prostokąta D otrzymujemy prostokąt rozłączny z rozważanym singletonem. To rozumowanie przenosi się na nieco szerszą klasę zbiorów, co opisuję poniżej.

Przykład. Jeśli P jest postaci $B \times N$ lub $N \times B$, gdzie B jest zbiorem borelowskim, a $N \in \mathcal{N}$, to $P \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.

Dowód. Rozważmy bzo przypadek $P = B \times N$ i weźmy prostokąt $D = X \times Y$. Niech $D' = X \times (Y \setminus N)$. Zauważmy, że

$$\lambda_2(D') = \lambda_2(D \setminus (X \times N)) = \lambda_2(D) - \lambda_2(X \times N) = \lambda_2(D),$$

bo N było miary zero. Co więcej, $D' \cap P = \emptyset$. Zatem $P \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$. □

Możemy teraz poczynić dwie obserwacje. Po pierwsze, wszystkie zbiory przeliczalne leżą w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$. Po drugie, zauważmy, że w szczególności pionowe i poziome odcinki należą do rozważanego ideału. W takiej sytuacji naturalne jest pytanie czy inne odcinki również w nim są? Dalej, inne krzywe (w szczególności wykresy funkcji) mają podobną strukturę ze względu na miarę i kategorię jak odcinek. W takim razie czy one również będą w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$? Okazuje się, że tak. Do pokazania tego będzie mi potrzebny jeden lemat z teorii miary, który udowodnię poniżej.

Lemat 1. *Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$, $\infty > \lambda(A) > 0$, to dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje równy co do miary, uporządkowany podział A, tj. takie rozłączne zbiory A_1,...,A_n, że $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$, jeśli $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$, $i < j$, to $a_i < a_j$ oraz $\lambda(A_i) = \lambda(A_j)$ dla $i, j \leqslant n$.*

Dowód. Weźmy dowolne $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, $\infty > \lambda(A) > 0$ oraz $n \in \omega$. Dla $q \in \mathbb{Q}$ niech $A^q = A \cap (-\infty, q)$. Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{A}_1 = \{A^q \;:\; \lambda(A^q) < \frac{\lambda(A)}{n}\}.$$

Zauważmy, że $\bigcup \mathcal{A}_1$ jest postaci $A \cap (-\infty, r)$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$. Co więcej, $\mathcal{A}_1$ jest rodziną wstępującą, więc z definicji miary mamy

$$\lambda(\bigcup \mathcal{A}_1) = \lim_{q \to r} \lambda(A^q) = \frac{\lambda(A)}{n}.$$

Zatem weźmy $A_1 = \bigcup \mathcal{A}_1$. Analogicznie ze zbioru $A \setminus A_1$ wycinamy zbiór A_2, również miary $\frac{\lambda(A)}{n}$. Rekurencyjnie otrzymujemy $A_1, ..., A_n$. Z konstrukcji wynika

$$\lambda(A_1) = ... = \lambda(A_n) = \frac{\lambda(A)}{n}.$$

Zauważmy teraz, że dla $k = 2, ..., n-1$ mamy $A_k = A \cap [x_{k-1}, x_k)$ dla pewnych $x_{k-1}, x_k \in \mathbb{R}$ oraz $A_n = A \cap [x_{n-1}, +\infty)$, podobnie jak dla A_1. To dowodzi, że wskazany podział jest uporządkowany. □

Dzięki temu lematowi możemy przejść do twierdzenia, które opisze pewną klasę elementów $\mathcal{I}(\mathcal{N})$.

Twierdzenie 1. *Jeśli f jest funkcją borelowską, to graph$(f) \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.*

Dowód. Ustalmy funkcję borelowską f i $D = A \times B$. Niech $d = \lambda_2(D)$, $a = \lambda(A)$, $b = \lambda(B)$. Niech dla $n \in \omega$, $A_1^n, ..., A_n^n$ i $B_1^n, ..., B_n^n$ będą podziałami zbiorów A i B jak w Lemacie 1. Zauważmy, że jeżeli

$$\exists n \; \exists k, l \leq n \; \lambda(A_k^n \cap f^{-1}[B_l^n]) \leq \frac{a}{n^2}, \tag{2}$$

to $D' = (A_k^n \setminus f^{-1}[B_l^n]) \times B_k^n$ spełnia $\lambda_2(D') > \frac{na-a}{n^2} \cdot \frac{b}{n} > 0$ oraz $D' \cap f = \emptyset$. Załóżmy nie wprost, że (2) nie zachodzi, czyli

$$\forall n \; \forall k, l \leq n \; \lambda(A_k^n \cap f^{-1}[B_l^n]) > \frac{a}{n^2}.$$

Teraz dla dowolnego $k \leq n$ mamy

$$\lambda(A_k^n \cap f^{-1}[B]) = \lambda(\bigcup_{l=1}^{n} (A_k^n \cap f^{-1}[B_l^n])),$$

co z rozłączności B_l^n możemy dalej przekształcać:

$$\lambda(\bigcup_{l=1}^{n} (A_k^n \cap f^{-1}[B_l^n])) = \sum_{l=1}^{n} \lambda(A_k^n \cap f^{-1}[B_l^n]) > n \cdot \frac{a}{n^2} = \frac{a}{n}.$$

Otrzymaliśmy

$$\lambda(A_k^n \cap f^{-1}[B]) > \frac{a}{n}.$$

Podobnie wysumujmy teraz po k:

$$\lambda(A \cap f^{-1}[B]) = \lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^n \cap f^{-1}[B]) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k^n \cap f^{-1}[B]) > n \cdot \frac{a}{n} = a.$$

Ale

$$\lambda(A \cap f^{-1}[B]) \leq \lambda(A) = a.$$

Zatem (2) musi być prawdziwe, a więc twierdzenie zachodzi. □

Przypomnijmy sobie, że podstawowe ideały - jak $\mathcal{N}$ czy $\mathcal{M}$ - są σ-ideałami, co oznacza, żę są zamknięte na przeliczalne sumy. Naturalnym pytaniem jest: czy $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ też ma tę własność? Pokażę, że nie, wykorzystując do tego przeliczalną sumę zbiorów, o których już pokazaliśmy, że leżą w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$. Do tego potrzebne będzie kilka definicji i jeden lemat używany często w teorii prawdopodobieństwa.

Definicja. Dla zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jego *liniowym domknięciem* nazywamy zbiór złożony ze wszystkich odcinków łączących punkty ze zbioru A, czyli:

$$L(A) = \{\alpha a + (1-\alpha)b \ : \ a, b \in A, \ \alpha \in [0,1]\}.$$

Uwaga. Jeśli $\mathrm{conv}(A)$ jest otoczką wypukłą zbioru A, to $L(L(A)) = \mathrm{conv}(A)$.

Definicja. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *ogonowym*, jeśli $A + \mathbb{Q} = A$, gdzie $A + \mathbb{Q}$ oznacza $\{a + q \ : \ a \in A, \ q \in \mathbb{Q}\}$.

Lemat 2 (Prawo 0-1 Kołmogorowa)**.** *Jeśli $A \subseteq [0,1]$ jest mierzalnym zbiorem ogonowym, to ma miarę 0 lub 1.* [1, str. 8]

Dowód. Szkic dowodu jest zamieszczony w [2, str. 84]. Całe rozumowanie przeprowadzone jest w przestrzeni Cantora 2^ω z miarą μ, która jest izomorficzna z $[0,1]$ z miarą λ (liczbie rzeczywistej odpowiada jej rozwinięcie dwójkowe). Przypomnijmy na początek, że odpowiednikiem liczb diadycznych w 2^ω jest zbiór wszystkich ciągów zerujących się od pewnego miejsca. Zatem zbiór ogonowy w 2^ω jest niezmienniczy na modyfikację skończenie wielu wyrazów jego elementów.
Niech E będzie mierzalnym zbiorem ogonowym. Dla $n \in \omega$ niech $X_n = \{0,1\}^n, Y_n$ będzie takim produktem $\{0,1\}$, że $2^\omega = X_n \times Y_n$. W takim razie dla każdego n istnieje zbiór $B_n \subseteq Y_n$ taki, że $E = X_n \times B_n$, bo żadna modyfikacja na pierwszych n pozycjach nie może wyjść poza E.
Niech F będzie cylindrem, czyli $F = A_n \times Y_n$ dla pewnego $A_n \subseteq X_n$. Przyjmijmy, że $|A_n| = k$. Wtedy $\mu(F) = \frac{k}{2^n}$. Dodatkowo, $E \cap F = A_n \times B_n$. Zauważmy, że

$$\mu(E \cap F) = \mu(A_n \times B_n) = \frac{k}{2^n}\mu(X_n \times B_n) = \mu(F)\mu(E).$$

Weźmy dowolny zbiór otwarty U. Jest on sumą przeliczalnie wielu rozłącznych cylindrów. Niech $\{F_n : n \in \omega\}$ będą tymi cylindrami. Wtedy

$$\mu(E \cap U) = \mu(\bigcup_n (E \cap F_n)) = \sum_n \mu(E \cap F_n) = \mu(E) \sum_n \mu(F_n) = \mu(E)\mu(U).$$

Wiemy, że zbiór mierzalny X możemy dowolnie przybliżać zbiorami otwartymi. Zatem możemy zapisać $\mu(E \cap X) = \mu(E)\mu(X)$. Skoro ta własność zachodzi dla dowolnego X, to w szczególności możemy podstawić $X = E$, dostając $\mu(E) = \mu(E)^2$. Zatem $\mu(E) = 0$ lub $\mu(E) = 1$. $\square$

Teraz mamy wszytkie narzędzia potrzebne do udowodnienia następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2. $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ *nie jest σ-ideałem.*

Dowód. Rozważmy $\mathcal{L} = L(\mathbb{Q}^2)$. Oczywiście, jeśli $l(p,q)$ jest odcinkiem łączącym punkty p i q, to $\mathcal{L} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}^2} l(p,q)$, więc jest przeliczalną sumą zbiorów z $\mathcal{I}(\mathcal{N})$.
Pokażemy, że nie jest to element $\mathcal{I}(\mathcal{N})$.
Załóżmy nie wprost, że $\mathcal{L} \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.
Wtedy istnieje $D = A \times B$ rozłączny z $\mathcal{L}$. Przyjmijmy $a = \lambda(A), \ b = \lambda(B)$. Przyjrzyjmy się teraz, jakie warunki spełniają punkty z $\mathcal{L}$. Jeśli $\langle x, y \rangle \in \mathcal{L}$, to istnieją punkty $\langle p_1, p_2 \rangle, \langle q_1, q_2 \rangle \in \mathbb{Q}^2$ oraz $\alpha \in [0,1]$ dla których:

$$\alpha p_1 + (1-\alpha)q_1 = x,$$

$$\alpha p_2 + (1-\alpha)q_2 = y.$$

Przekształcając powyższe, dostaniemy

$$\frac{x-q_1}{p_1-q_1} = \alpha = \frac{y-q_2}{p_2-q_2}.$$

Podstawiając $s = \frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}$, $t = q_2 - q_1 s$ dostajemy

$$y = sx + z.$$

dla pewnych $s, z \in \mathbb{Q}$. W szczególności dla $s = 1$ otrzymujemy $y - x = z$.
Niech $a \sim b$ oznacza $a - b \in \mathbb{Q}$. Jest to relacja równoważności wykorzystana przy konstrukcji zbioru Vitalego. Możemy w takim razie powiedzieć, że jeśli $\langle x, y\rangle \in \mathcal{L}$, to $x \sim y$. Zatem

$$\forall a \in A\ \forall b \in B\ [a] \neq [b]. \tag{3}$$

W szególności, wnioskujemy, że $A \cap B = \emptyset$. Uzupełnimy teraz każdą klasę abstrakcji tej relacji w A i B do maksymalnej, żeby spełniony był warunek $\forall a \in A\ [a] \subseteq A$ i podobnie dla B. Oznaczmy $A_1 = A + \mathbb{Q}$, $B_1 = B + \mathbb{Q}$. Są to domknięcia A i B względem relacji $\sim$. Z warunku (3) wynikało, że klasy abstrakcji elementów A i B nie pokrywają się, a skoro A_1 i B_1 nie mają żadnych nowych klas abstrakcji, to $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.
Zauważmy, że A_1 oraz B_1 są zbiorami ogonowymi, więc zgodnie z lematem 2 mają miarę 0 lub 1. Ale $A \subseteq A_1$ i $B \subseteq B_1$. Z tego wynika, że $\lambda(A_1) > a$, $\lambda(B_1) > b$. Wobec tego musi zachodzić $\lambda(A_1) = \lambda(B_1) = 1$. W takim razie, skoro są to rozłączne zbiory to $\lambda(A_1 \cup B_1) = 2$, co jest niemożliwe, bo $A_1 \cup B_1 \subseteq [0,1]$.
Zatem $\mathcal{L} \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$, co kończy dowód. $\square$

Wiemy już, że $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ nie jest σ-ideałem. Dlatego naturalnym wydaje się domknięcie go na przeliczalne sumy i badanie własności tego domknięcia. Przykład przedstawiony powyżej nie jest najprostszym, jaki można wskazać, jest jednak pierwszym, którego skuteczność udowodniłem. Można pokazać, że zbiór $\{\langle x, y\rangle : x + y \in \mathbb{Q}\}$ nie należy do $\mathcal{I}(\mathcal{N})$, pomimo bycia przeliczalną sumą jego elementów. Dowód jest krótki przy powołaniu na twierdzenie Steinhausa, udowodnione w 1920: [4]

Twierdzenie 3. *Jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami dodatniej miary Lebesgue'a, to* $\mathrm{Int}(A + B) \neq \emptyset$.

Na powyższe twierdzenie będziemy się powoływać w następnym rozdziale, pozwoli ono dokładniej zbadać $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ oraz $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.

4 Analiza $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.

Definicja. Przez $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ będziemy oznaczać σ-ideał generowany przez $\mathcal{I}(\mathcal{N})$.

Przede wszystkim chcemy pokazać, że otrzymany ideał jest niezależny od $\mathcal{N}_2$ i $\mathcal{M}_2$, czyli że nie zachodzi między nimi żadne zawieranie.

4.1 Niezależność $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ od $\mathcal{M}_2$.

Skonstruujemy zbiór komizerny miary zero, który będzie w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$. Najpierw uporządkujmy punkty o współrzędnych wymiernych. Niech $\mathbb{Q}^2 = \{q_i : i \in \omega\}$. Konstrukcja przebiega tak samo jak w standardowym przykładzie na prostej. Przez $B(x, r)$ rozumiemy kulę wokół x o promieniu r w odpowiedniej przestrzeni. Określmy kolejno:

$$I_{i,j} = B(q_i, \frac{1}{j2^i}),$$

$$G_j = \bigcup_i I_{i,j},$$

$$A = \bigcap_j G_j.$$

Skoro $\lambda_2(G_j) \leqslant \sum\limits_i \lambda_2(I_{i,j}) \leqslant \frac{1}{j^2}$, to oczywiście $\lambda_2(A)$=0. Dodatkowo widzimy, że zbiory G_j^c są nigdziegęste, więc A^c jest mizerny. Pokażemy teraz, że $A \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.

Rozważmy dowolny prostokąt $D = X \times Y$, taki że $\lambda(X), \lambda(Y) > 0$. Dla $q \in X \cap \mathbb{Q}$ określmy $k_q = min\{i : q_i \in q \times \mathbb{Q}\}$. Dalej niech:

$$U_{q,j} = B(q, \frac{1}{j2^{k_q}}),$$

$$X_j = \bigcup_{q \in X \cap \mathbb{Q}} U_{q,j},$$

$$X_0 = \bigcap_j X_j.$$

Oczywiście $\lambda(X_0) = 0$. Oznaczmy $X' = X \setminus X_0$. Analogicznie definiujemy Y'. Z konstrukcji od razu widać, że $(X' \times Y') \cap A = \emptyset$. Zatem $A \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.
Konsekwencje tego zawierania są dwojakie: po pierwsze, oczywiście $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N}) \nsubseteq \mathcal{M}_2$, skoro mamy w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ zbiór niemizerny. Z drugiej strony, $A^c \in \mathcal{M}_2$, więc gdyby zachodziło zawieranie w drugą stronę, to w $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ byłby zarówno A jak i A^c. Wtedy mielibyśmy $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N}) = P([0, 1]^2)$. Wskażemy teraz pewną klasę zbiorów, które są poza $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.

Fakt. *Jeśli A, B mają dodatnia miarę, to $A \times B \notin \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $A \times B = \bigcup\limits_{n \in \omega} I_n$, gdzie $I_n \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ dla każdego n. Przypomnijmy, że w każdym zbiorze dodatniej miary mozemy wskazać zwarty podzbiór dodatniej miary. W takim razie niech P_0 będzie zwartym dodatnim podprostokątem $A \times B$, rozłącznym z I_0. Możemy go wskazać, skoro $I_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.

Dalej definiujemy rekurencyjnie: niech P_{n+1} będzie zwartym dodatnim podprostokątem P_n rozłącznym z I_{n+1}. Skoro wszystkie P_n są zwarte, to $P = \bigcap_n P_n$ jest niepusty. Jest to dalej podzbiór $A \times B$. Z drugiej strony, P jest rozłączny z każdym I_n, więc rónież z ich sumą, czyli $A \times B$, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

W szczególności z powyższego faktu wnioskujemy, że $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ jest ideałem właściwym, co kończy dowód niezależności od $\mathcal{M}_2$.

4.2 Niezależność $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ od $\mathcal{N}_2$.

Rozważania w tej części chcę zacząć od wprowadzenia zbiorów przekątniowych. Okaże się, że dzięki zbiorom tego typu możemy odkryć dodatkowe własności badanego ideału.

Definicja. Dla A - podzbioru prostej oznaczamy $A^* = \{\langle x, y\rangle : x + y \in A\}$

Poniżej przedstawiam kilka oczywistych własności takich zbiorów:

- Gdy $A \subseteq B$, to $A^* \subseteq B^*$.
- Dodatkowo jeśli $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, to $A^* = \bigcup_{n\in\omega} A_n^*$.
- Jeśli U jest otwarty, to U^* też jest otwarty.
- $\lambda_2(A^*) = \lambda(A)^2$.

Zanim przedstawię twierdzenie odnoszące się do tych zbiorów, udowodnię dwa lematy przydatne w dalszym rozumowaniu.

Lemat 3. *Jeśli X jest zbiorem dodatniej miary, to przedstawia się on jako $X' \cup N$, gdzie N jest miary zero, a X' ma następującą własność:*

$$\text{O ile } X' \cap (a, b) \neq \emptyset, \text{ to } \lambda(X' \cap (a, b)) > 0. \tag{4}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli powyższa własność będzie zachodzić dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Q}$, to będzie zachodzić dla dowolnych przedziałów. Niech $\{U_i : i \in \omega\}$ będzie rodziną przedziałów o końcach wymiernych. Oznaczmy $A = \bigcup\{U_i : \lambda(U_i \cap X) = 0\}$. Teraz niech $N = X \cap A$ oraz $X' = X \setminus N$.
Oczywiście, zgodnie z postulatem, N ma miarę 0. Pokażemy, że X' spełnia (4):

Weźmy dowolny przedział o końcach wymiernych (a, b) i załóżmy, że $X' \cap (a, b) \neq \emptyset$. Załóżmy nie wprost, że $\lambda(X' \cap (a, b)) = 0$. Wtedy również $\lambda(X \cap (a, b)) = 0$, bo X jest większy tylko o zbiór miary zero. Wobec tego $(a, b) \subseteq A$. Zatem $X' \cap (a, b) = \emptyset$ - sprzeczność z założeniem. $\square$

Lemat 4. *Dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{R}$ istnieją jego borelowskie nadzbiory B_m, B_k spełniające następujące warunki:*

- *Jeśli $X \subseteq B_m \setminus N$ i N mierzalne, to $N \in \mathcal{N}$.*
- *Jeśli $X \subseteq B_k \setminus M$ i M ma wł. Baire'a to $M \in \mathcal{M}$.*

Dowód. Ustalmy X. Rozważmy rodzinę zbiorów borelowskich miary dodatniej rozłącznych z X. Weźmy z niej maksymalną podrodzinę zbiorów parami rozłącznych $\mathcal{C}$. Z własności miary wiemy, że jest ona przeliczalna. Niech teraz $B_m = (\bigcup \mathcal{C})^c$. Jest to oczywiście nadzbiór X. Weźmy teraz dowolne mierzalne $N \in \ B_m \setminus X$. Gdyby miało miarę dodatnią, to $\mathcal{C}$ nie byłoby maksymalne, bo można by dołożyć do niego N. Zatem N ma miarę 0.

Konstrukcję B_k przeprowadzimy podobnie. Rozważmy zbiory borelowskie II kategorii rozłączne z X i weźmy maksymalną podrodzinę zbiorów parami rozłącznych $\mathcal{T}$. Każdy element $\mathcal{T}$ ma własność Baire'a, czyli można go zapisać jako $U \triangle M$ dla otwartego U i $M \in \mathcal{M}$. Wiemy, że dwa takie zbiory mają niepusty przekrój dokładnie wtedy gdy odpowiadające im zbiory otwarte mają niepusty przekrój (w przeciwnym wypadku jeden z tych zbiorów otwartych rozkładałby się na dwa mizerne). Zatem rodzinie $\mathcal{T}$ odpowiada rodzina parami rozłącznych zbiorów otwartych, więc $\mathcal{T}$ jest przeliczalna. Niech $B_k = (\bigcup \mathcal{T})^c$. Jest to nadzbiór X. Jeśli $M \in B_k \setminus X$ ma wł. Baire'a, to musi zachodzić $M \in \mathcal{M}$. W przeciwnym wypadku $\mathcal{T}$ nie byłoby maksymalne. $\square$

Uwaga. Taką samą konstrukcję możemy przeprowadzić w $\mathbb{R}^2$. Otrzymane B_m, B_k nazywamy otoczką borelowską zbioru X względem miary/kategorii.

Twierdzenie 4.

1. *F jest nigdziegęsty* $\iff$ $F^* \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$.
2. $M \in \mathcal{M} \iff M^* \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.

Dowód.

1. $(\Rightarrow)$
   Weźmy dowolny F nigdziegęsty, bzo niech będzie on domknięty, oraz dowolne X, Y dodatniej miary. Niech X_1, Y_1 realizują rozkłady X, Y jak w lemacie 3.
   Rozważmy $A = X_1 + Y_1$. Z twierdzenia Steinhausa istnieje otwarty $U \subseteq A$. Skoro F jest nigdziegęsty, to istnieje $U_1 \subseteq U$ rozłączny z F. Zbadajmy własności U_1^*.
   Oczywiście istnieją $x \in X_1, y \in Y_1$ takie, że $\langle x, y \rangle \in U_1^*$. Skoro U_1^* jest otwarte, to istnieją odcinki U_x, U_y wokół x, y takie, że $U_x \times U_y \subseteq U_1^*$.
   Niech teraz $X_0 = X_1 \cap U_x, Y_0 = Y_1 \cap U_y$. Te przekroje są niepuste (są w nich x, y), więc z lematu 3 mają one dodatnią miarę. Zbiór $X_0 \times Y_0$, będąc podzbiorem U_1^*, jest rozłączny z F^*, co dowodzi tezy.
   $(\Leftarrow)$
   Weźmy dowolny zbiór F taki, że $F^* \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ i załóżmy nie wprost, że istnieje otwarty zbiór U, w którym F jest gęsty. Ustalmy $\langle x, y \rangle \in U^*$. Skoro U^* jest otwarte, to istnieje w nim otwarte otoczenie $\langle x, y \rangle$ postaci $U_x \times U_y$. U_x, U_y są otwarte, więc mają dodatnią miarę. Z założenia istnieją ich podzbiory dodatniej miary X, Y, takie że $X \times Y \cap F^* = \emptyset$. Z tego wynika, że $X + Y \cap F = \emptyset$.
   Z drugiej strony, $X + Y \subseteq U$. Co więcej, z twierdzenia Steinhausa istnieje otwarty $U_0 \subseteq X + Y \subseteq U$. Okazuje się, że $U_0 \cap F = \emptyset$. Sprzeczność, bo F był gęsty w U.

2. ($\Rightarrow$)
   Niech $M = \bigcup_i F_i$, gdzie F_i są nigdziegęste. Wtedy $M^* = \bigcup_i F_i^*$ jest przeliczalną sumą zbiorów z $\mathcal{I}(\mathcal{N})$, więc $M^* \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.
   ($\Leftarrow$)
   Załóżmy nie wprost, że $F \notin \mathcal{M}$, ale $F^* \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$. Możemy przyjąć, że jest to zbiór borelowski. Gdyby nie był, zastępujemy go przez jego borelowską otoczkę względem kategorii. Przyjmijmy, że F jest postaci $U \setminus M'$ dla otwartego niepustego U i mizernego M. Wiemy, że $M^* \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$. Ideał jest zamknięty na sumy, więc $F^* \cup M^* \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$. Ale $F^* \cup M^* = U^*$. Jest to zbiór otwarty, więc jest w nim pewien dodatni prostokąt. A pokazaliśmy już, że takie nie mogą leżeć w $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$.

$\square$

Wiemy, że istnieją zbiory mizerne miary 1. Zatem, podobnie jak w 4.1, $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ nie może zawierać się w $\mathcal{N}_2$. Z drugiej strony, gdyby $\mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$, to $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ byłby całym zbiorem potęgowym, a pokazaliśmy już, że nie jest.

5 Ideał generowany przez $\mathcal{M}$

Na początku zdefiniowaliśmy ideał wykorzystując zbiory miary zero. Poniżej zobaczymy jakie własności ma, analogicznie zdefiniowany, $\mathcal{I}(\mathcal{M})$.

Definicja. Niech $\mathcal{E} = \{A \times B : \ A, B \in Ba_+\}$ będzie rodziną prostokątów II kategorii.

Teraz możemy określić

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \{F \subseteq [0,1]^2 : \ \forall D \in \mathcal{E}\ \exists D' \in \mathcal{E}\ (D' \subseteq D \wedge D' \cap F = \emptyset)\}.$$

Jest to rodzina zbiorów dla których z każdego prostokąta II kategorii można wybrać podprostokąt II kategorii rozłączny z rozważanym zbiorem.

Jak wcześniej, przez $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{M})$ oznaczamy σ-ideał generowany przez $\mathcal{I}(\mathcal{M})$. W tym rozdziale zbadamy podobieństwa i różnice między $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ i $\mathcal{I}(\mathcal{M})$.
Przypomnijmy, że w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ mieliśmy prostokąty postaci $N \times B$ dla $N \in \mathcal{N}$. Analogicznie, w $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ będą wszystkie prostokąty postaci $M \times B$ i $B \times M$ dla $M \in \mathcal{M}$.

Dowód. Ustalmy $M \times B$ jak wyżej, oraz $A \times C \in \mathcal{E}$. Wtedy $A \setminus M$ nie jest I kategorii, więc $(A \setminus M) \times C \in \mathcal{E}$; ten zbiór jest szukanym podprostokątem $A \times C$, świadczy o tym, że $M \times B \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$.
Przypadek $B \times M$ jest w pełni analogiczny. □

Istotną klasą elementów w $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ były nigdziegęste zbiory przekątniowe. Można łatwo udowodnić, że dokładnie te same zbiory są w $\mathcal{I}(\mathcal{M})$. Jednak pokażemy dużo mocniejsze twierdzenie, dowodząc, że, w przeciwieństwie do $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$, ideał $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{M})$ nie jest nową rodziną zbiorów.

Twierdzenie 5. $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2$.

Dowód. ($\subseteq$)
Pokażemy, że $\mathcal{I}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}_2$, co od razu powoduje, że wszystkie przeliczalne sumy elementów $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ również są w $\mathcal{M}_2$.
Dowód przeprowadzimy przez kontrapozycję. Weźmy zatem dowolny B będący II kategorii. Pokażemy, że nie jest on elementem $\mathcal{I}(\mathcal{M})$. Z założenia istnieją otwarty U i mizerny M takie, że $(U \setminus M) \subseteq B$. Oczywiście w U możemy znaleźć otwarty prostokąt V, bo są one bazą topologii produktowej. Każdy podzbiór V rozłączny z B musi być podzbiorem M. Zatem każdy taki podzbiór musi być mizerny.
Z drugiej strony, żeby $B \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$, musielibyśmy w V mieć podzbiór II kategorii rozłączny z B, co nie jest możliwe, zgodnie z poprzednim stwierdzeniem.
($\supseteq$)
Pokażemy najpierw, że jeśli F jest nigdziegęsty, to $F \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$. Wtedy oczywiście każdy zbiór mizerny będzie elementem $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{M})$.
Niech F będzie domkniętym zbiorem nigdziegęstym, a B prostokątem II kategorii. Istnieją otwarte U, V oraz mizerne M, M' takie, że $(U \setminus M) \times (V \setminus M') \subseteq B$. Skoro F jest nigdziegęsty, to z $U \times V$ możemy wybrać otwarty $U' \times V'$ rozłączny z F. W takim razie $(U' \setminus M) \times (V' \setminus M') \subseteq B$, jest II kategorii i jest rozłączny z F. Zatem $F \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$, co kończy dowód. □

6 Ideały Marczewskiego

Rozważaliśmy do tej pory dwa ideały o bardzo podobnych definicjach. Definicje te można uogólnić w następujący sposób.

Definicja. Mając daną przestrzeń X i pewną rodzinę $\mathcal{F}$ jej podzbiorów, definiujemy ideał Marczewskiego jako

$$M(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X : \forall F \in \mathcal{F}\ \exists F' \in \mathcal{F}\ (F' \subseteq F \wedge F' \cap A = \emptyset)\}.$$

Sprawdźmy najpierw, że rodzina tak zdefiniowana faktycznie jest ideałem.

Dowód. Rozważmy dowolne $X, \mathcal{F}$.

- Niech $A \subseteq B \in M(\mathcal{F})$ oraz $F \in \mathcal{F}$. Z założenia istnieje $F' \in M(\mathcal{F})$ - podzbiór F rozłączny z B. Skoro $A \subseteq B$, to F' jest również rozłączny z A, więc $A \in M(\mathcal{F})$.
- Weźmy dowolne różne $A, B \in M(\mathcal{F})$ oraz $F \in \mathcal{F}$. Wtedy istnieje $F' \in \mathcal{F}$ - podzbiór F rozłączny z A. Skoro jest to element $\mathcal{F}$, to istnieje jego podzbiór $F'' \in \mathcal{F}$ rozłączny z B. W takim razie F'' jest rozłączny z $A \cup B$, co dowodzi, że $A \cup B \in M(\mathcal{F})$.

□

Zauważmy, że ideały rozważane wcześniej można zapisać jako:

- $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = M(\mathcal{D})$,
- $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = M(\mathcal{E})$,

gdzie $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ są rodzinami prostokątów niezerowych i II kategorii, odpowiednio. Okazuje się, że najbardziej znane ideały również można zdefiniować właśnie w ten sposób. Zacznijmy od prostej obserwacji.

Uwaga. Jeśli $\mathcal{T}$ jest topologią na X, to $M(\mathcal{T} \setminus \emptyset)$ jest ideałem zbiorów nigdziegęstych.

Zbiory nigdziegęste są naturalnym obiektem definiowanym w ten sposób. Ideały generowane w ten sposób mogą różnić się jednak nawet tak podstawową cechą, jaką jest zamkniętość na przeliczalne sumy. Zbiory nigdziegęste czy $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ są zamknięte jedynie na skończone sumy. Poniżej przedstawiam inny ideał tego typu, który został wprowadzony przez Marczewskiego w [3]. Wykorzystamy do tego zbiory doskonałe.

Definicja. Zbiór P nazywamy doskonałym, jeśli jest domknięty i nie ma punktów izolowanych, tj.

$$\forall x \in P \quad P \setminus \{x\} \text{ nie jest domknięty.}$$

Rodzinę wszystkich doskonałych podzbiorów prostej oznaczamy $\mathcal{P}$.
Ideał $M(\mathcal{P} \setminus \{\emptyset\})$ oznaczamy przez s^0.

s^0 jest przykładem σ-ideału rozważanego typu. Okazuje się, że można w ten sposób przedstawić również klasycznie rozważane ideały.

Twierdzenie 6. *Oznaczmy przez* $\mathfrak{M}_+$ *rodzinę zbiorów mierzalnych o dodatniej mierze, a przez* Ba_+ *rodzinę zbiorów drugiej kategorii. Przyjmijmy* $X = \mathbb{R}$. *Wtedy:*

1. $M(\mathfrak{M}_+) = \mathcal{N}$,
2. $M(Ba_+) = \mathcal{M}$.

Dowód.

1. $(\supseteq)$
   Niech $N \in \mathcal{N}$, $A \in \mathfrak{M}_+$. Wtedy $A \setminus N$ dalej ma dodatnią miarę i jest podzbiorem A rozłącznym z N, więc $N \in M(\mathfrak{M}_+)$
   $(\subseteq)$
   Ustalmy $A \in M(\mathfrak{M}_+)$. Gdyby A miał dodatnią miarę, to musiałby istnieć jego podzbiór dodatniej miary rozłączny z nim. W takim razie $A \in \mathcal{N}$ albo jest niemierzalny. Musimy wykluczyć tę drugą opcję.
   Załóżmy nie wprost, że A jest niemierzalny. Ten sam argument co powyższy dowodzi, że każdy mierzalny podzbiór A ma miarę 0. Niech teraz B będzie borelowską otoczką A, tzn. będzie takie, że dla mierzalnych N mamy $A \subseteq (B \setminus N) \Rightarrow N \in \mathcal{N}$. B ma dodatnią miarę, więc istnieje jego podzbiór dodatniej miary rozłączny z A, co jest sprzeczne z definicją B.

2. $(\supseteq)$
   Niech $M \in \mathcal{M}$, $A \in MBa_+$. Wtedy $A \setminus M$ dalej jest II kategorii i jest podzbiorem A rozłącznym z M, więc $M \in Ba_+$
   $(\subseteq)$
   Ustalmy $A \in M(Ba_+)$. Gdyby A był II kategorii, to musiałby istnieć jego podzbiór II kat. rozłączny z nim. W takim razie $A \in \mathcal{M}$ albo nie ma własności Baire'a. Musimy wykluczyć tę drugą opcję.
   Postąpimy podobnie jak w poprzednim punkcie. Załóżmy nie wprost, że A nie ma własności Baire'a. Ten sam argument co powyższy dowodzi, że każdy podzbiór A z wł. Baire'a jest mizerny. Niech teraz B będzie borelowską otoczką A, tzn. będzie takie, że dla M z wł. Baire'a $A \subseteq (B \setminus M) \Rightarrow M \in \mathcal{M}$. B jest II kategorii, więc istnieje jego podzbiór II kategorii rozłączny z A, co jest sprzeczne z definicją B.

□

7 Algebry ilorazowe

Przypomnijmy, że rodzina zbiorów borelowskich tworzy algebrę Boole'a (dokładniej: σ-ciało). Dzięki ideałom możemy otrzymać nową strukturę.

Definicja. Niech I będzie ideałem. Na rodzinie zbiorów borelowskich wprowadzamy relację równoważności $\sim_I$ wzorem $A \sim_I B \iff A \triangle B \in I$.

O ile wynika to z kontekstu, zbiory borelowskie na płaszczyźnie ($\mathrm{Bor}[0,1]^2$) i na prostej ($\mathrm{Bor}[0,1]$) będziemy oznaczać tak samo. Zbiór ilorazowy $\mathrm{Bor}/\sim_I$ będziemy krócej oznaczać Bor/I.

Na Bor/I również mamy strukturę algebry Boole'a z działaniami na reprezentantach, tj.:

- $[A] \cup [B] = [A \cup B]$,
- $[A] \cap [B] = [A \cap B]$,
- $[A]^c = [A^c]$.

Dzięki algebrom ilorazowym możemy opisać związek między $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$, $\mathcal{N}$ oraz $\mathcal{M}$.

Definicja. Na algebrze Boole'a określamy częściowy porządek wzorem $a \leqslant b \iff a \cup b = b$.
Pojęć *sup* czy *inf* używamy w odniesieniu do tego porządku.
Podalgebrę G algebry A nazywamy regularną, jeśli dla dowolnego $X \subseteq G$ spełniającego $sup_G X = 1$ zachodzi $sup_A X = 1$.

Twierdzenie 7. *$Bor/\mathcal{N}$ oraz $Bor/\mathcal{M}$ zanurzają się w $Bor/\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$, tworząc podalgebry regularne.*

Dowód.
1. $\mathrm{Bor}/\mathcal{N}$
Rozważmy w $\mathrm{Bor}/\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ zbiory postaci $A \times [0,1]$ dla A mierzalnych. Zauważmy, że tworzą one podalgebrę, tj. są rodziną zamkniętą na działania - $[A \times [0,1]] \cup [B \times [0,1]] = [(A \cup B) \times [0,1]]$. Analogicznie dla przekroju i dopełnienia.
Niech $f : Bor/\mathcal{N} \to Bor/\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ będzie dane wzorem $f([A]) = [A \times [0,1]]$. Łatwo zauważyć, że jest to homomorfizm. Potrzebujemy pokazać różnowartościowość przekształcenia.
Jeśli $f([A]) = f([B])$, to równoważnie $(A \triangle B) \times [0,1] \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$. Wcześniej (w rozdziale 4.1) zauważyliśmy, że tak będzie jedynie gdy $A \triangle B \in \mathcal{N}$. Ale wtedy z definicji $[A] = [B]$.

Rozważmy teraz pewną rodzinę C (formalnie: ich klasy abstrakcji w $Bor/\mathcal{N}$) taką, że jedynym zbiorem większym od wszystkich elementów C jest całe $[0,1]$. Przyjrzyjmy się obrazowi tej rodziny przez f. Wszystkie elementy obrazu są postaci $A \times [0,1]$, zatem ich najmniejsze ograniczenie będzie tej postaci. Niech w takim razie $D \times [0,1]$ będzie ograniczeniem obrazu C. To znaczy dokładnie, że dla każdego $B \in C$ mamy $B \times [0,1] \cup D \times [0,1] = D \times [0,1]$ z dokładnością do zbioru miary zero. Ale to oznacza, że $B \cup D = D$, czyli D jest ograniczeniem C. Zakładaliśmy, że jedynym takim ograniczeniem jest $[0,1]$, więc jedynym ograniczeniem obrazu C jest $[0,1]^2$.

2. Bor/$\mathcal{M}$
Postąpimy podobnie jak w pierwszym przypadku. Rozważmy zbiory A^* dla A mających własność Baire'a. Zamkniętość na działania jest oczywista. Podobnie jak poprzednio, określimy homomorfizm $g : Bor/\mathcal{M} \to Bor/\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ wzorem $g([A]) = [A^*]$. Homomorficzność wynika z własności zbiorów przekątniowych. Pokażemy, że jest to przekształcenie różnowartościowe.
Jeśli $g([A]) = g([B])$, to $A^* \triangle B^* \in \mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$. Wiemy, że równoważnie $A \triangle B \in \mathcal{M}$. Ale wtedy $[A] = [B]$.

Teraz pokażemy regularność. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną w $Bor/\mathcal{M}$, której jedynym ograniczeniem górnym jest $[0,1]$. Najmniejsze ograniczenie $g[\mathcal{A}]$ będzie postaci B^* dla pewnego B. Dla każdego $A \in \mathcal{A}$ mamy wtedy $A^* \cup B^* = B^*$ z dokładnością do zbioru I kategorii. Ale $A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$. Czyli $A \cup B = B$. Zatem B jest ograniczeniem $\mathcal{A}$. Z założenia $B = [0,1]$, więc jedynym ograniczeniem obrazu $\mathcal{A}$ jest cała płaszczyzna. $\square$

Powyższe twierdzenie formalizuje intuicję przedstawioną we wstępie - ideał $\mathcal{I}_\sigma(\mathcal{N})$ generuje algebrę, w którą regularnie zanurzone są algebry generowane przez $\mathcal{N}$ i$\mathcal{M}$, pomimo że w jego definicji odwoływaliśmy się jedynie do miary. Pokażemy teraz, że między algebrami otrzymanymi z $\mathcal{N}$ i$\mathcal{M}$ również można wskazać pewną zależność, ale nie mamy tam regularności, którą tu uzyskaliśmy dość prosto. Do dowodu wykorzystamy zbiory regularnie otwarte.

Definicja. Zbiór U jest regularnie otwarty, jeśli $U = \operatorname{Int}\overline{U} = U^{-c-c}$.

Uwaga. Dowolny odcinek otwarty jest regularnie otwarty.
Łatwo zauważyć, że przekrój dwóch zbiorów regularnie otwartych też jest regularnie otwarty.

Poniższy lemat został udowodniony między innymi w [5, str. 274].

Lemat 5. *Dla każdego borelowskiego zbioru B istnieją jedyne zbiory: U regularnie otwarty i M mizerny, takie że $B = U \triangle M$.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że jeśli U jest otwarty, to $U \subseteq U^{-c-c}$. Oczywiście $U \subseteq U^-$. Po dopełnieniu mamy $U^{-c} \subseteq U^c$. Zbiór U^c jest domknięty, więc $U^{-c-} \subseteq U^c$. Ponownie patrzymy na dopełnienia, otrzymując $U \subseteq U^{-c-c}$.
Ponownie biorąc dopełnienia domknięć otrzymujemy $U^{-c-c-c} \subseteq U^{-c}$. Z drugiej strony, możemy zastosować udowodnione zawieranie dla otwartego U^{-c}. W rezultacie otrzymujemy równość: $U^{-c} = U^{-c-c-c}$. Zatem zbiór U^{-c} jest regularnie otwarty, a co za tym idzie, również U^{-c-c} ma tę własność.
Pokażemy teraz, że dla każdego otwartego U można wskazać regularnie otwarte V różniące się od U o zbiór mizerny. Niech $V = U^{-c-c}$. Z powyższych rozważań można wywnioskować, że $U^{-c-c-} \subseteq U^-$. Zatem

$$U \subseteq U^{-c-c} \subseteq U^{-c-c-} = U^-.$$

Stąd widać, że różnica V i U jest zawarta w brzegu U, więc jest mizerna.
Wiemy, że każdy zbiór borelowski B różni się od pewnego zbioru otwartego U o zbiór mizerny, więc z powyższego fragmentu wnioskujemy, że różni się od pewnego zbioru regularnie otwartego V o zbiór mizerny. Pozostało pokazać, że takie

V jest jedyne.
Załóżmy, że U, V są regularnie otwarte, oraz różnią się o zbiór mizerny. Ponieważich brzegi są mizerne, to U różni się od $\overline{V}$ o zbiór mizerny i na odwrót. Zatem $U \setminus \overline{V}$ oraz $V \setminus \overline{U}$ są mizerne. Ale są to też zbiory otwarte. Z twierdzenia Baire'a muszą to być zbiory puste. Zatem zachodzi $\overline{U} = \overline{V}$. Korzystając z regularności, możemy zapisać

$$U = (U^-)^{c-c} = (V^-)^{c-c} = V,$$

co kończy dowód jednoznaczności, tym samym kończąc dowód lematu. □

Twierdzenie 8. *$Bor/\mathcal{M}$ zanurza się w $Bor/\mathcal{N}$, ale to zanurzenie nie jest regularne.*

Dowód. Niech $f : Bor/\mathcal{M} \to Bor/\mathcal{N}$ będzie dane wzorem $f([B]_{\mathcal{M}}) = [U]_{\mathcal{N}}$, gdzie U jest regularnie otwartym reprezentantem $[B]$. Z lematu 5. wiemy, że jest taki dokładnie jeden. Łatwo można pokazać, że jest to homomorfizm. Dla przykładu pokażemy zachowywanie przekroju. Niech A, B będą borelowskie, zaś U, V będą regularnie otwartymi reprezentantami ich klas abstrakcji w $Bor/\mathcal{M}$. Wtedy

$$f([A]_{\mathcal{M}} \cap [B]_{\mathcal{M}}) = f([U]_{\mathcal{M}} \cap [V]_{\mathcal{M}}) = f([U \cap V]_{\mathcal{M}}) =$$
$$= [U \cap V]_{\mathcal{N}} = [U]_{\mathcal{N}} \cap [V]_{\mathcal{N}} = f([A]_{\mathcal{M}}) \cap f([B]_{\mathcal{M}}).$$

Pokażemy, że f jest różnowartościowe.

Załóżmy że $f([A]) = f([B])$ i niech U, V będą regularnie otwartymi zbiorami odpowiadającymi A i B. Z założenia $\lambda(U \triangle V) = 0$. Oczywiście $U \setminus \overline{V}$ jest otwarty. Ale z założenia ma miarę 0. Zatem jest to zbiór pusty, czyli $U \subseteq \overline{V}$. Analogicznie dostaniemy $V \subseteq \overline{U}$. Rozumowanie identyczne jak pod koniec dowodu lematu 5. prowadzi do wniosku, że $U = V$, więc f jest różnoawrtościowe.
Pozostało pokazać, że obraz $Bor/\mathcal{M}$ nie jest regularny. Niech $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. Dalej niech $U_n = B(q_n, \frac{1}{8 \cdot 2^n}$. Są to odcinki, więc są regularnie otwarte. Niech $\mathcal{U} = \{[U_n] : n \in \omega\}$ będzie rodziną elementów $Bor/\mathcal{M}$. Ograniczenie tej rodziny musi (z dokładnością do zbioru mizernego) zawierać każdy ze zbiorów U_n. Jednak $(\bigcup \mathcal{U})^c$ jest zbiorem nigdziegęstym, więc jest w tej samej klasie abstrakcji co $[0, 1]$. Ograniczenie $\mathcal{U}$ od jej sumy będzie różnić się tylko o przeliczalnie wiele zbiorów I kategorii, więc jest w klasie abstrakcji całego odcinka. Jednak supremum obrazu $\mathcal{U}$ nie będzie pełne w $Bor/\mathcal{N}$. Zauważmy, że $\lambda(\bigcup \mathcal{U}) \leqslant \sum\limits_n \lambda(U_n) = \frac{1}{2}$. Wnioskujemy, że obraz $\bigcup \mathcal{U}$ nie jest w tej samej klasie abstrakcji co $[0, 1]$. Z drugiej strony, $\bigcup f[\mathcal{U}]$ jest ograniczeniem $f[\mathcal{U}]$. W takim razie supremum ma miarę nie większą niż $\frac{1}{2}$, więc nie może być całym odcinkiem. Dowodzi to, że $Bor/\mathcal{M}$ nie tworzy regularnej podalgebry $Bor/\mathcal{N}$. □

Literatura

[1] T.Bartoszyński, H.Judah *Set Theory. On the Structure of the Real Line.* Taylor & Francis Group, 1995.

[2] J.C.Oxtoby *Measure and Category* Second Edition. Springer-Verlag New York 1980.

[3] Szpilrajn (Marczewski) E., Sur une classe de fonctions de M. Sierpinski et la classe correspondante d'ensembles, Fund. Math. 24 (1935).

[4] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, Fund. Math. 1 (1920).

[5] S. Givant, P. Halmos, *Introduction to Boolean Algebras.* Springer-Verlag New York 2009.