

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Analiza danych

Roksana Krysztofiak

Problem przesuwania figur przez korytarz

Praca dyplomowa
napisana pod kierunkiem
dr. Jakuba Gismatullina

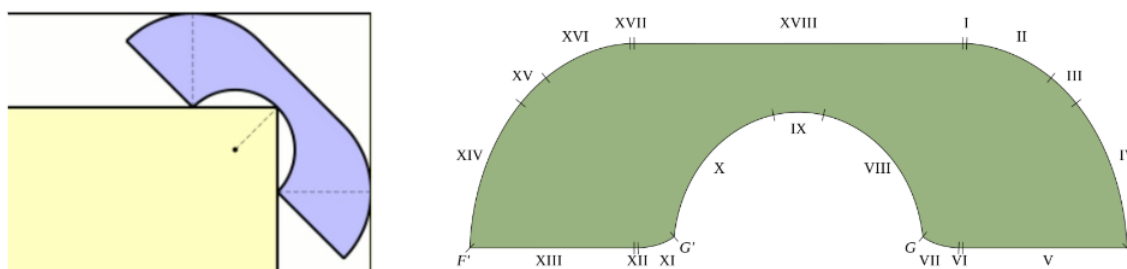
Wrocław 2023

Spis treści

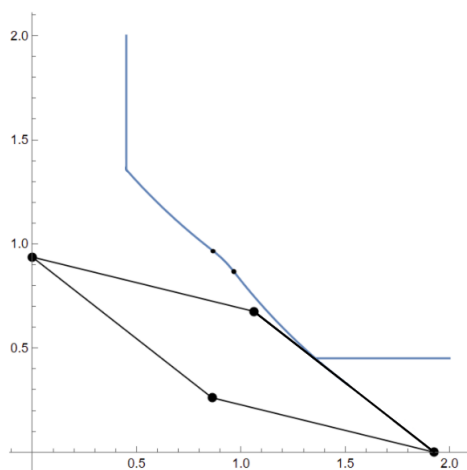
| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Wstęp | 3 |
| 2 | Przesuwanie odcinka | 5 |
| 2.1 | Klasyczny problem przesuwania odcinka | 5 |
| 2.2 | Przypadek, gdy $a = b$ | 7 |
| 2.3 | Nietypowy korytarz | 8 |
| 3 | Przesuwanie prostokąta | 11 |
| 4 | Przesuwanie rombu | 13 |
| 4.1 | Przesuwanie rombu, gdy A i C dotykają ścian | 14 |
| 4.2 | Ustalony korytarz | 18 |
| 4.2.1 | Przypadek $a = b$ | 18 |
| 4.2.2 | Przypadek ogólny | 19 |
| 5 | Spis rysunków i kodów | 22 |

§1 Wstęp

Podczas przeprowadzek, kupna nowych mebli czy też remontów, możemy natknąć się na utrudnienia podczas przenoszenia wielkogabarytowych sprzętów. Problemem może być przejście przez futrynę, czy też zakręcenie meblem w korytarzu. Matematyk Leo Mosera w 1966 [1] sformułował problem przesunięcia sof. Zagadnienie przesunięcia mebla zostało uproszczone do poziomu dwuwymiarowego. W tym nierozwiązanym do dziś zadaniu, mamy korytarz o szerokości 1 jednostki, w kształcie litery L . Poszukujemy takiego kształtu sof, którą można przesunąć w takowym korytarzu, a jej pole będzie największe. Pierwszą nasuwającą się możliwością jest kanapa w kształcie półkola. Jej pole oczywiście jest równe $\frac{\pi}{2} \approx 1,570796$. Dla lata później John Hammersley zaproponował rozwiązanie o polu w przybliżeniu równym około 2,207416. Jego propozycja składała się z dwóch ćwiartek koła rozdzielonych prostokątem o wymiarach $1 \times \frac{4}{\pi}$. Dodatkowo aby umożliwić przesunięcie sof w takowym korytarzu, w prostokącie wyciął on półkole o promieniu $\frac{2}{\pi}$. W 1992 roku Joseph Gerver [2] skonstruował sofę składającą się z 18 krzywych o polu $\approx 2,219532$. Ilustracje obrazujące propozycje zaproponowane przez tych naukowców możemy zobaczyć poniżej.



Rysunek 1.1: Kształty sof zaproponowane przez Hammersley'a (po lewej) i Gerver'sa (po prawej)



Rysunek 1.2: Przesuwanie rombu <http://www.math.uni.wroc.pl/~gismat/Roksana.gif>

Tak jak wspomniałam wcześniej problem ten nadal zostaje otwarty. Inspirując się tym zagadnieniem, co prawda nie postaramy się udowodnić, że istnieje sofa o większym polu, jednak zainspirujemy się tym tematem.

Będziemy przesuwac po korytarzach kilka obiektów geometrycznych. Rozważymy: odcinek, prostokąt i romb.

Opiszę mój wkład w pracy, względem literatury.

- W problemie przesuwania odcinka w rozdziale 2.3 rozważam bardzo nietypowy korytarz, w którym maksymalna długość odcinka wynosi $\sqrt{3}$.
- W problemie przesuwania prostokąta o krótszym boku $c = 1$ (rozdział 3), rozważam przypadek $a = 5$ i $b = 1$, w którym da się jawnie obliczyć maksymalną długość boku, wynoszącą

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{97 + 40\sqrt{10}} - 5 \right) \approx 4.97.$$

- W rozdziale 4 rozważamy nowy problem, nie pojawiający się dotychczas w literaturze, maksymalizacji pola rombu:

jakie jest maksymalne pole rombu, który da się przesunąć przez prostokątny korytarz, o szerokościach a i b ?

W przypadku $a = b$ odpowiedzią jest kwadrat i pole wynosi a^2 . Przypadek $a \neq b$ jest trudny. Nie udało mi się znaleźć zwartego wzoru, jednak liczne eksperymenty obliczeniowe doprowadziły do sformułowania hipotezy 4.1, opisująca taki romb o maksymalnym polu.

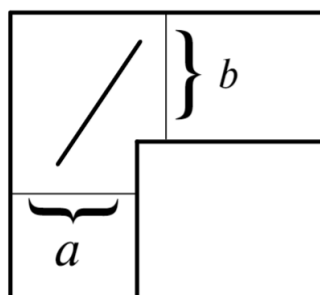
W pracy inspiruję się literaturą, np. [3, 4, 5].

§2 Przesuwanie odcinka

W tym rozdziale zajmiemy się poszukiwaniem maksymalnej długości odcinka możliwej do przemieszczenia przez zadany korytarz.

2.1 Klasyczny problem przesuwania odcinka

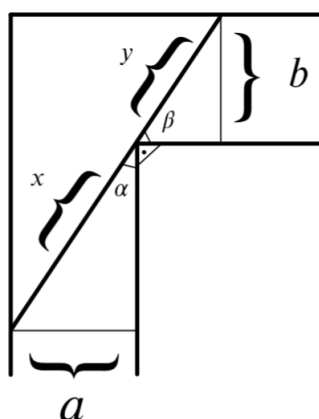
Zacznijmy od sytuacji, gdy dwa korytarze kolejno o szerokości a i b przecinają się pod kątem prostym. Poszukujemy najdłuższego patyka o nieznaczonej szerokości, który można przesunąć wzdłuż zakrętu.



Rysunek 2.1: Przesuwanie odcinka

Naszą próbę przesunięcia obiektu możemy zacząć od pionowego przesuwania patyka do momentu styku z górną krawędzią korytarza. Następnie przytrzymując się prawej krawędzi obracamy go o kąt 90° w prawą stronę. Moment w którym linia może utknąć występuje, gdy końce opierają się o dwie odległe ściany, a środek dotyka wewnętrznego narożnika. Zatem szukana maksymalna długość patyka, będzie minimalną jego długością, w takowych położeniu.

Jako L oznaczmy długość patyka. Będzie to funkcja kąta ostrego α . Na rysunku pomocniczym 2.2, który pomoże nam wyprowadzić szukany wzór.



Rysunek 2.2: Wyznaczanie długości odcinka

Z założeń kąt $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. Wiedząc, że $\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$, dostajemy, iż $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Podstawowa trygonometria daje nam:

$$x = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad y = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Cały problem sprowadza się do wyliczenia minimum poniższej funkcji:

$$L(\alpha) = x + y = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Pamiętając, że a i b są liczbami dodatnimi oraz $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, wyliczamy pochodną funkcji L :

$$\frac{dL}{d\alpha}(\alpha) = L'(\alpha) = \left(\frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha} \right)' = \left(\frac{a}{\sin \alpha} \right)' + \left(\frac{b}{\cos \alpha} \right)' = -\frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{b \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Następnie poszukujemy punktów stacjonarnych:

$$\begin{aligned} L'(\alpha) &= 0 \\ \frac{b \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} &= \frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ b \sin^3 \alpha &= a \cos^3 \alpha \\ \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} &= \frac{a}{b} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \\ \tan \alpha &= \sqrt[3]{\frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

Nasza funkcja L ma punkt stacjonarny $\alpha_0 = \arctan(\sqrt[3]{\frac{a}{b}})$. Korzystając z jednego z powyższych równań oraz z jedyńki trygonometrycznej uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)} &= \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1 - \cos^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)} &= \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \\ 1 - \cos^2(\alpha_0) &= \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \cos^2(\alpha_0) \\ \cos^2(\alpha_0) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right) &= 1 \\ \cos^2(\alpha_0) &= \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} \\ \cos(\alpha_0) &= \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}. \end{aligned}$$

Analogicznie, rozpisując $\cos^2(\alpha_0) = 1 - \sin^2(\alpha_0)$, dostajemy:

$$\sin(\alpha_0) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}.$$

Zatem minimum funkcji osiągane dla α_0 jest równe:

$$L(\alpha_0) = \frac{a}{\sin(\alpha_0)} + \frac{b}{\cos(\alpha_0)} = \frac{a}{a^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} + \frac{b}{b^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \quad (2.1)$$

$$= \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{ab^{\frac{1}{3}} + ba^{\frac{1}{3}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right) = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}. \quad (2.2)$$

2.2 Przypadek, gdy $a = b$

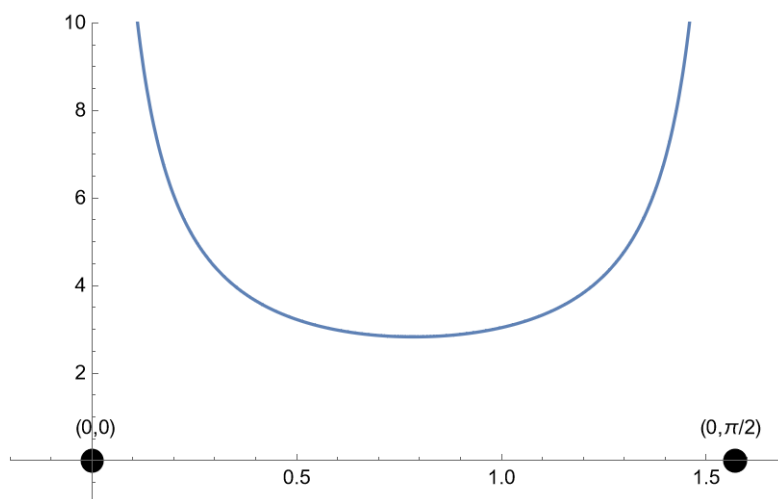
Rozważmy teraz specjalny przypadek, gdy $a = b$. Korzystając z wcześniejszych wyliczeń (2.2), możemy wyliczyć moment osiągnięcia minimum:

$$\alpha_0 = \arctan \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

dla odcinka długości :

$$L(\alpha_0) = L \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}a.$$

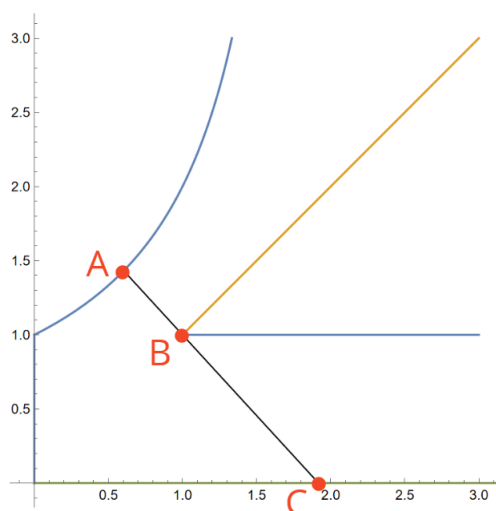
Poniżej możemy się przyjrzeć wykresowi funkcji $\alpha \mapsto L(\alpha) = \sin(\alpha)^{-1} + \cos(\alpha)^{-1}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, dla $a = b = 1$.



Rysunek 2.3: Przypadek dla $a = b = 1$

2.3 Nietypowy korytarz

Przyjrzyjmy się teraz szczególnemu rodzajowi korytarza, który ukazany jest na rysunku 2.4.



Rysunek 2.4: Przesuwanie odcinka w nietypowym korytarzu

Pierwsza część korytarza ma stałą szerokość równą 1 jednostce. Druga część zaczyna się szerokością równą 1. Wewnętrzna ściana idzie pod kątem 45° do poprzedniej części przejścia (pomarańczowa półprosta). Ta zewnętrzna tworzy jednak łuk po prostej o wzorze $y = \frac{2}{2-x}$ (górną, niebieską część wykresu). Dodatkowo na rysunku 3 zaznaczone są trzy punkty. Punkt A ma współrzędne $(x, \frac{2}{2-x})$, punkt $B(1, 1)$, a punkt $C(t, 0)$. Zapisując współrzędne pierwszego punktu w zależności od y dostaniemy $A(2 - \frac{2}{y}, y)$. Zgodnie ze wcześniejszym schematem, poszukujemy najkrótszej długości odcinka AC . Aby ją obliczyć, zaczniemy od zapisania pierwszej współrzędnej punktu C za pomocą y .

Aby wyznaczyć wartość współrzędnej t , skorzystamy z faktu, iż wektory BA i AC są współliniowe. Wyznacznik tych dwóch wektorów musi zwrócić wartość równą 0.

$$\begin{vmatrix} t-1 & x-1 \\ -1 & y-1 \end{vmatrix} = (t-1)(y-1) + x-1 = ty - t - y + x = 0$$

Przekształcając, chcąc wyznaczyć t otrzymujemy:

$$t = \frac{y-x}{y-1} = \frac{y - \frac{2y-2}{y}}{y-1} = \frac{y^2 - 2y + 2}{y^2 - y}$$

Możemy teraz przejść do obliczenia długości d odcinka AC :

$$d^2 = (2 - \frac{2}{y} - t)^2 + (y - 0)^2 = (y - \frac{2}{y} - \frac{y^2 - 2y + 2}{y^2 - y})^2 + y^2 = \frac{y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 4y + 4}{(y-1)^2}$$

gdzie $y > 0$ (z racji umiejscowienia punktu A w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych).

Licząc pochodną kwadratu długości AC dostajemy:

$$(d^2)'(y) = 2 \frac{y^4 - 3y^3 + 3y^2 - 2}{(y-1)^3}$$

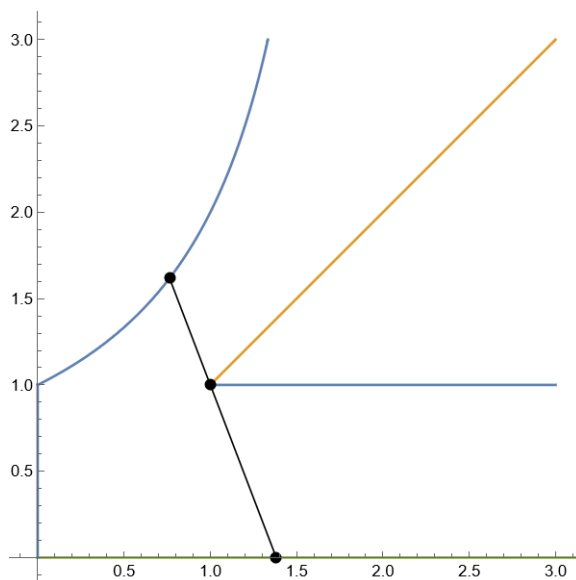
Po krótkich obliczeniach dostajemy, iż:

$$(d^2)'(y_0) = 0 \text{ dla } y_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dodatkowo po podstawieniu otrzymujemy:

$$d^2(y_0) = 3, d(y_0) = \sqrt{3}.$$

Zatem najdłuższy odcinek, który możemy przeprowadzić przez taki korytarz ma długość $\sqrt{3}$ i jest ona ukazany na rysunku poniżej.



Rysunek 2.5: Najdłuższy odcinek możliwy do przemieszczenia w nietypowym korytarzu

Podamy kod w Mathematice.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

kod 1

```
punkt[s_, x_, y_] := Graphics[{PointSize[s], Point[{x, y}]}]
odc[x_, y_, s_, t_] := Graphics[Line[{x, y}, {s, t}]]
Nn0 = 3;
f1[y_] := 1 - 1/(2 y^(1/2))
f0[y_] := f1[y] - f1[1]
Manipulate[Show[
  ParametricPlot[{f0[y], y}, {y, 1, Nn0}],
  ParametricPlot[{x, 1}, {x, x}, {2 x - 2, 0}], {x, 1, Nn0}],
  ParametricPlot[{0, y}, {y, 0, 1}],
  punkt[0.02, f0[y], y],
  punkt[0.02, 1, 1],
  punkt[0.02, (y - f0[y])/(y - 1), 0],
  odc[f0[y], y, (y - f0[y])/(y - 1), 0],
  PlotRange -> {{0, Nn0}, {0, Nn0}}, Axes -> True,
  AxesOrigin -> Automatic], {y, 1.001, Nn0}
Plot[(f0[y] - (y - f0[y])/(y - 1))^2 + y^2, {y, 1, Nn0}]
(f0[y] - (y - f0[y])/(y - 1))^2 + y^2 // Expand // FullSimplify
Minimize[{(f0[y] - (y - f0[y])/(y - 1))^2 + y^2, y > 1}, y] //
  FullSimplify // ToRadicals
```

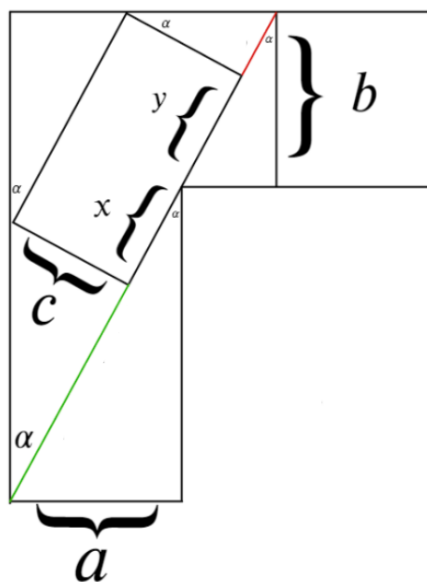
Listing 1: Przesuwanie odcinka w nietypowym korytarzu

§3 Przesuwanie prostokąta

Teraz rozważymy inną sytuację. Chcemy przemieścić prostokąt wzdłuż korytarza. Jest to przypadek bardziej praktyczny, aniżeli przesuwanie odcinka. W życiu codziennym większej ilości obiektów rzut na płaszczyznę podłogi jest prostokątny. Większy problem stanowi przeniesienie szafy, stołu, krzesła, niż na przykład przeniesienie miotły lub patyka. W ramach uproszczenia zajmujemy się jednak przesunięciem prostokąta - sprowadzamy ten problem do płaszczyzny.

Zakładamy, że w naszym prostokącie jeden bok ma ustaloną długość (tzw. grubość). Będziemy poszukiwać takiego prostokąta, który posiada najdłuższy drugi bok. Problem ten był rozważany w [3], gdzie podano rozwiązanie w postaci wzoru, zależnego od pierwiastka wielomianu stopnia 6. My użyjemy elementarnej trygonometrii.

Do znalezienia takiego prostokąta, który możemy przesunąć w korytarzu o wymiarach $a \times b$, skorzystamy z rysunku umieszczonego poniżej.



Rysunek 3.1: Przesuwanie prostokąta w korytarzu

Możemy założyć, że a, b, c są dodatnie oraz $c \leq \min\{a, b\}$. Korzystając z podstawowej trygonometrii obliczamy długość zielonego i czerwonego odcinka, dostając odpowiednio $\frac{c}{\tan \alpha}$ oraz $c \cdot \tan \alpha$. Spoglądając na rysunek jesteśmy w stanie zapisać również następujące równania:

$$\begin{aligned} x + \frac{c}{\tan \alpha} &= \frac{a}{\sin \alpha} \\ y + c \cdot \tan \alpha &= \frac{b}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Powyższe równości wykorzystamy do stworzenia równania opisującego długość boku prostokąta przylegającego do wewnętrznego narożnika korytarza:

$$L(\alpha) = x + y = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha} - c \cdot \left(\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \right).$$

Zależy nam na znalezieniu minimum powyższej funkcji dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Zaczynamy od wyliczenia pochodnej:

$$L'(\alpha) = -\frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{b \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - c \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right).$$

Możemy przejść do poszukiwania punktu stacjonarnego:

$$\begin{aligned} L'(\alpha) &= 0 \\ \frac{a \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} &= \frac{b \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2} - c \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)^2} - \frac{1}{\sin(\alpha)^2} \right) \\ a \cos^3(\alpha) &= b \sin^3(\alpha) - c \cdot (\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) \\ a \cos^3(\alpha) &= b \sin^3(\alpha) - c \cdot (2 \sin^2(\alpha) - 1) \\ \frac{a \cos^3(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} &= b - c \cdot \left(\frac{2}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{\sin^3(\alpha)} \right) \\ \frac{\cos^3(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} &= \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{2}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{\sin^3(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Wydaje się, że nie ma prostego sposobu na znalezienie rozwiązania przy dodatnich a , b , c . Możemy jednak wyliczyć szczególny, interesujący nas przypadek, gdy $a = 5$, $b = 1$, $c = 1$. Wówczas :

$$L'(\alpha) = -5 \frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} - \frac{1}{\cos^2(\alpha)} + \frac{1}{\sin^2(\alpha)}.$$

Rozwiązując równanie $L'(\alpha) = 0$ otrzymujemy punkt stacjonarny :

$$\alpha_0 = 2 \cdot \arctan \left(\frac{1}{6} \left(\sqrt{33 + 12\sqrt{10}} \right) - 3 \right),$$

a następnie podstawiając:

$$L(\alpha_0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{97 + 40\sqrt{10}} - 5 \right).$$

Poniżej kod w Mathematicie potwierdzający obliczenia.

— kod 2 —

```
alpha0 := Solve[{0 == -5 Cos[alpha]/Sin[alpha]^2 + Sin[alpha]/Cos[alpha]^2 +
  1/Cos[alpha]^2 + 1/Sin[alpha]^2, 0 < alpha <= Pi/2},
  alpha] // FullSimplify

Evaluate[5/Sin[alpha] + 1/Cos[alpha] - (Tan[alpha] + 1/Tan[alpha]) /.
  alpha -> alpha0]
```

Listing 2: Wyznaczenie wartości najdłuższego boku dla $a = 5$, $b = 1$ i $c = 1$

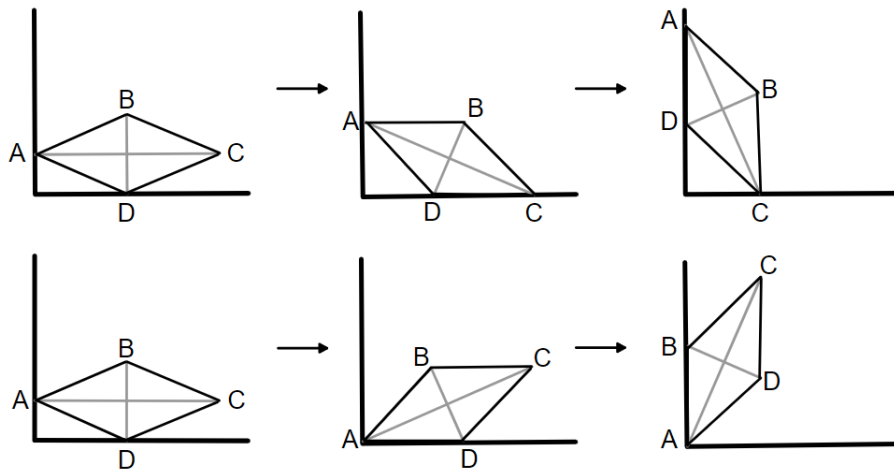
§4 Przesuwanie rombu

Zajmiemy się teraz sytuacją przesuwania rombu w klasycznym korytarzu. Rozważmy następujące zadanie:

jakie jest maksymalne pole rombu, który da się przesunąć przez prostokątny korytarz o szerokościach a i b ?

Zmienimy lekko podejście do sytuacji. Nie będziemy poszukiwać rombu o największym polu, który można przemieścić w zadanym korytarzu. Spróbujemy poszukać minimalny korytarz, przez który przejdzie romb o ustalonej długości boku x i kącie ostrym α .

Rozważając problem zaczynamy od narysowania zewnętrznych krawędzi przejścia. Aby podczas przemieszczania rombu zatoczyć nim jak najmniejsze pole, musimy przesunąć go w jak najmniejszej odległości od zewnętrznych linii. Zatem w sytuacji wyjściowej wierzchołek lub bok naszej figury muszą być styczne do ściany korytarza. Na rysunku 4.1 umieściliśmy etapy przesuwania rombu zaczynając od styczności krawędzi korytarza z jednym wierzchołkiem.



Rysunek 4.1: Możliwe przesunięcia rombu

Łatwo zauważyć, iż przesunięcie rombu z takiej pozycji wyjściowej, w pośrednich krokach zawiera sytuacje, gdy ze ścianą krawędzi styczny jest jego bok. Zatem by minimalizować powierzchnię zajmowaną przez naszą figurę, optymalnie jest zacząć od razu od drugiego kroku. Naszą pozycją wyjściową będzie romb wstawiony bokiem do krawędzi korytarza.

W sytuacji pierwszych trzech rysunków przedstawionych na rys. 4.1, chcemy utrzymać wierzchołek B jak najbliżej zewnętrznej krawędzi korytarza. Zatem przekątna AC również musi spełniać ten warunek. Z tego powodu przesuwając romb będziemy utrzymywać wierzchołki A i C na ścianach korytarza. Tą sytuację przeanalizujemy dokładniej w następnym podrozdziale.

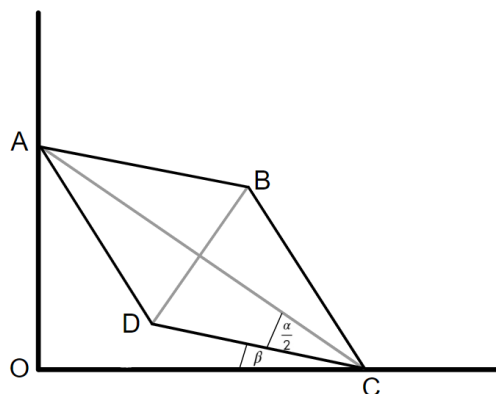
W sytuacji pozostałych trzech rysunków na rys. 4.1, aby romb był jak najbliżej ścian korytarza, dążymy do jak najszybszego momentu w którym wierzchołek B zetknie się ze zewnętrzną ścianą. Z tego powodu tylko wierzchołek A będzie dotykać ścian korytarza.

Intuicyjnie jasne jest, że w tym przypadku nie dostaniemy minimalnego korytarza. Więc taki sposób przeciągania rombu nie jest optymalny.

4.1 Przesuwanie rombu, gdy A i C dotykają ścian

Zacniemy od przeanalizowania etapów poruszania się rombu. Na początku przesuwamy go wzdłuż korytarza bokiem DC , do momentu gdy wierzchołek A dotknie drugiej ściany przejścia. Następnie poruszamy wierzchołkiem A do góry, aż bok AD całkowicie dotknie ściany korytarza. Animacja przedstawiająca takie przesuwanie jest dostępna pod adresem² <http://www.math.uni.wroc.pl/~gismat/Roksana.mp4>.

Oznaczmy jako β kąt między odcinkiem DC , a poziomą ścianą korytarza. Wpisując rysunek w układ współrzędnych i uznając kąt ściany jako jego początek, możemy wyznaczyć wzór na poruszanie się konkretnych wierzchołków.



Rysunek 4.2: Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków A i C

Mając ustalony bok rombu x i jego kąt ostry α , opisujemy długość jego dłuższej przekątnej jako $2x \cos(\frac{\alpha}{2})$. Korzystamy z pomocniczego rysunku 4.2. Spoglądając na trójkąt AOC , z pomocą podstawowej trygonometrii obliczamy współrzędne wierzchołków wyrażone za pomocą kąta β :

$$A = \left(0, 2x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right) \quad \text{i} \quad C = \left(2x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), 0\right).$$

Zaznaczone na rysunku 4.3 trójkąty FBA oraz ECB służą nam do wyznaczenia współrzędnych wierzchołka B :

$$B = (x \cos(\beta), x \sin(\alpha + \beta)). \quad (4.1)$$

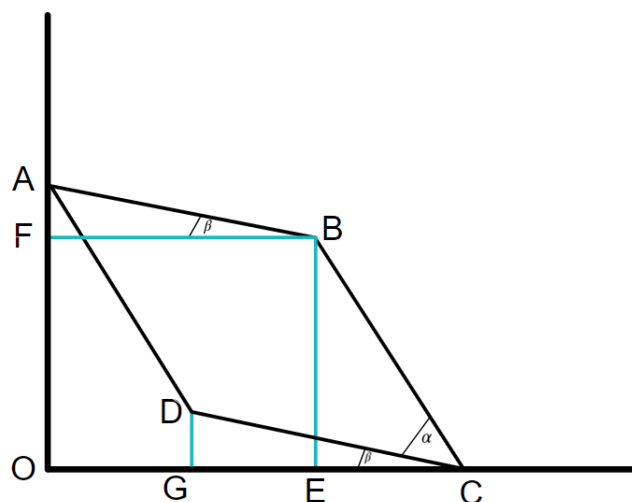
Długość odcinka GC możemy zapisać jako $x \cos(\beta)$. Korzystając z obliczonej wcześniej długości odcinka OC zapiszemy pierwszą współrzędną punktu D jako

$$2x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) - x \cos(\beta).$$

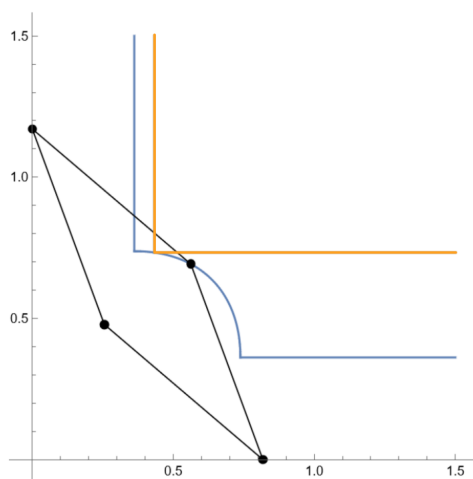
Wykorzystując dodatkowo trójkąt GCD dostajemy współrzędne punktu D :

$$D = \left(2x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) - x \cos(\beta), x \sin(\beta)\right)$$

²<http://www.math.uni.wroc.pl/~gismat/Roksana.gif>

Rysunek 4.3: Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków B i D

Warto zauważyć, że $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$. Po osiągnięciu przez β wielkości $\frac{\pi}{2} - \alpha$ romb będzie przesuwany pionowo w górę.



Rysunek 4.4: Przeszkoda przy przesuwaniu rombu

W pierwszym momencie można by pomyśleć, że obszar, który zakreśla wierzchołek B w ruchu, jest miejscem, w którym można umiejscowić drugą krawędź minimalnego korytarza. Spoglądając na rysunek 4.4 widzimy jednak, że ten obszar należy poszerzyć. Pomarańczowa krzywa oznacza propozycję postawienia wewnętrznej krawędzi korytarza. Jednak podczas przesuwania istnieją momenty, w których nasz romb nie zmieściłby się w zadanym korytarzu. Musimy zatem obliczyć obwiednie krzywych AB i BC , które uzupełnią obszar zajmowany przez naszą figurę. Obwiednia to linia otaczająca i ograniczająca punkty, w których funkcja osiąga pewną wartość lub zbiór wartości. Aby wyznaczyć postać jej równania należy przyrównać do zera wyznacznik składający się z pochodnych cząstkowych względem zmiennych. W tym celu napisaliśmy kod w Mathematicie wyznaczający nam równania potrzebnych obwiedni.

kod 2

```

a[al_, bet_, x_] := {0, 2 x Cos[al/2] Sin[al/2 + bet]}
b[al_, bet_, x_] := {x Cos[bet], x Sin[al + bet]}
c[al_, bet_, x_] := {2 x Cos[bet + al/2] Cos[al/2], 0}
d[al_, bet_, x_] := {2 x Cos[al/2] Cos[bet + al/2] - x Cos[bet],
  x Sin[bet]}
ab[s_, al_, bet_, x_] := s a[al, bet, x] + (1 - s) b[al, bet, x]
bc[s_, al_, bet_, x_] := s b[al, bet, x] + (1 - s) c[al, bet, x]
wyn1 := Det[{D[ab[s, al, bet, x], s], D[ab[s, al, bet, x], bet]}] //
  FullSimplify
wyn2 := Det[{D[bc[s, al, bet, x], s], D[bc[s, al, bet, x], bet]}] //
  FullSimplify
wyn1a := Solve[wyn1 == 0, s]
wyn2a := Solve[wyn2 == 0, s]
ab[s, al, bet, x] /. wyn1a // FullSimplify
bc[s, al, bet, x] /. wyn2a // FullSimplify

```

Listing 3: Wyznaczenie równań obwiedni

W wyniku tych obliczeń dostajemy wzór na obwiednie krzywych tworzonych przez boki AB i BC . Poniżej są podane te równania parametryczne obwiedni, przy ustalonym $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i $x > 0$, oraz parametrze $\beta \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha]$. Gdy $\beta \geq \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, to obwiednia $O_1(\beta)$ jest wyznaczona przez bok AB , a gdy $\beta \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, to obwiednia $O_2(\beta)$ – przez bok BC :

Dla $\beta \in [\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha]$ mamy,

$$O_1(\beta) := \left(2x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2(\beta) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \right. \\ \left. - \frac{1}{4}x (-\sin(\alpha - \beta) - 3\sin(\beta) + \sin(3\beta) - 4\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 3\beta)) \right).$$

Dla $\beta \in [0, \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}]$ mamy,

$$O_2(\beta) := \left(\frac{1}{4}x (4\cos(\beta) + 3\cos(\alpha + \beta) + \cos(3(\alpha + \beta)) - 2\sin(\beta)\sin(2(\alpha + \beta))), \right. \\ \left. 2x \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \sin^2(\alpha + \beta) \right).$$

Teraz obliczymy dla jakiego β_1 dostajemy punkt przecięcia obwiedni AB z krzywą po której porusza się punkt B . W tym celu wystarczy przyrównać ze sobą pierwsze współrzędne punktów. Do obliczeń wykorzystamy postać $O_1(\beta)$ uzyskaną w Mathematicie bez użycia komendy `//FullSimplify` (pamiętamy, że $x > 0$, $\cos(\beta) > 0$):

$$x \cos(\beta) = x \cos(\beta) \left(1 + \frac{1}{2}(-1 + \cos(\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)) \right)$$

$$1 = 1 + \frac{1}{2}(-1 + \cos(\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta))$$

$$0 = -1 + \cos(\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)$$

$$1 - \cos(\alpha) = \cos(2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)$$

Korzystając ze wzoru na sumę cosinusów oraz z parzystości funkcji cosinus dostaje-

my:

$$\begin{aligned}
 1 - \cos(\alpha) &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + 4\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right) \\
 \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} &= \cos\left(\frac{\alpha + 4\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 \frac{1 - \cos(\alpha)}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= \cos\left(\frac{\alpha + 4\beta}{2}\right) \\
 \frac{\alpha + 4\beta}{2} &= \arccos\left(\frac{1 - \cos(\alpha)}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \\
 \beta_1 = \beta &= \left(2 \arccos\left(\frac{1 - \cos(\alpha)}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) - \alpha\right) / 4
 \end{aligned}$$

Sprawdzimy w Mathematicie, że tak wyliczone β_1 spełnia też drugie równanie:

```

                                kod 3
In[1] := -(1/4)(-Sin[al-bet]-3Sin[bet]+Sin[3bet]-4Sin[al+bet]+Sin[al+3bet])
-Sin[al+bet]/.bet->(2ArcCos[(1-Cos[al])/(2Cos[al/2])]-al)/4//FullSimplify

Out[1]= 0

```

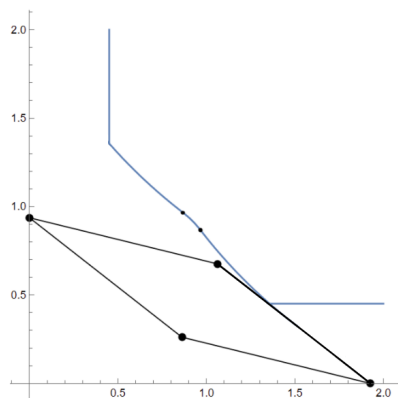
Listing 4: Wyznaczenie β_1 dla O_1

Z rysunku widać, że kąt β_2 wyznaczający punkt przecięcia dla O_2 leży symetrycznie względem $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ do kąta β_1 , zatem

$$\beta_1 + \beta_2 = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta_1.$$

Zatem udało nam się znaleźć minimalny korytarz przez który przejdzie korytarz przesuwający się tak, jak w opisanym przypadku pierwszym (rysunek 4.5).

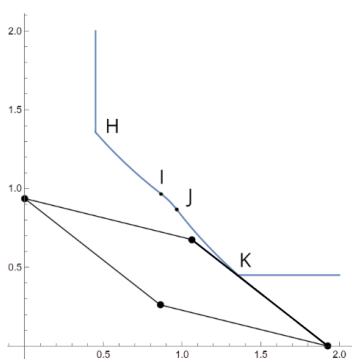


Rysunek 4.5: Minimalny korytarz dla ustalonego rombu

4.2 Ustalony korytarz

W rozdziale zakładamy, że mam do czynienia z ustalonym korytarzem w kształcie litery L o szerokościach a i b . Szukamy największego pola rombu, który da się po takim korytarzu przesunąć. Nie znaleźliśmy rozwiązania w postaci gotowego wzoru, lecz znaleźliśmy hipotezę, potwierdzoną obliczeniami.

Przesuwając romb o boku $x > 0$ i kącie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, jego obwiednia składa się z 5 części:



Rysunek 4.6: Minimalny korytarz dla ustalonego rombu

Niech $R(x, \alpha)$ będzie zbiorem punktów tych 5 części.

Naszym celem jest znalezienie maksymalnego pola rombu $K(a, b)$, który da się przesunąć przez korytarz o szerokościach a i b , a więc znalezienie (x, α) :

$$K(a, b) = \max\{x^2 \sin(\alpha) : (a, b) \in R(x, \alpha)\}.$$

Wysokość rombu o boku x i kącie α wynosi $x \cdot \sin(\alpha)$. Więc warunkiem koniecznym aby taki romb mógł przejść przez korytarz o szerokościach a i b jest

$$x \cdot \sin(\alpha) \leq \min\{a, b\},$$

$$x^2 \cdot \sin(\alpha) \leq \min\{a, b\} \cdot \max\{x : \text{romb o boku } x \text{ da się przesunąć}\}.$$

Kwadrat o boku $\min\{a, b\}$ zawsze może przejść przez korytarz. Dlatego otrzymujemy nierówności:

$$\min\{a, b\}^2 \leq K(a, b) \leq \min\{a, b\} \cdot \max\{x : \text{romb o boku } x \text{ da się przesunąć}\}.$$

4.2.1 Przypadek $a = b$

Zaczynamy od prostego przypadku, gdy $a = b$. Obliczymy $K(a, a)$.

Dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ możemy rozpisać wzór na pole rombu jako $P = x^2 \sin(\alpha)$. Wtedy:

$$\sqrt{\frac{P}{\sin(\alpha)}} = x \tag{4.2}$$

Łatwo sprawdzić, iż w zbiorze $R(x, \alpha)$, współrzędne punktu B dla $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ są równe (a, a) . Zatem korzystając z (4.1) i (4.2) dostajemy:

$$\begin{aligned} a &= x \sin(\alpha + \beta) \\ a &= \sqrt{\frac{P}{\sin(\alpha)}} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ a^2 &= \frac{P}{\sin(\alpha)} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ P &= a^2 \frac{\sin(\alpha)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Chcąc maksymalizować wartość pola rombu musimy poszukać maksimum wyrażenia:

$$h(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

W tym celu skorzystamy z programu Mathematica:

```

                                kod 5
In[1]:= Maximize[{Sin[alpha]/Sin[alpha/2 + Pi/4],
0 <= alpha <= Pi/2}, alpha]

Out[1]= {1, {alpha -> \[Pi]/2}}
```

Listing 5: Szukanie maksimum wyrażenia

W tym przypadku rozwiązaniem problemu będzie kwadrat o boku a , więc $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oraz $K(a, a) = a^2$.

4.2.2 Przypadek ogólny

W tym przypadku nie udało nam się znaleźć wzoru na maksimum pola. Trudnością w wyznaczeniu takiego wzoru było obliczenie przecięcia obwiedni $O_1(\beta)$ i $O_2(\beta)$ z odpowiednio pionową i poziomą krawędzią korytarza.

Opierając się na obliczeniach stawiamy następującą hipotezę.

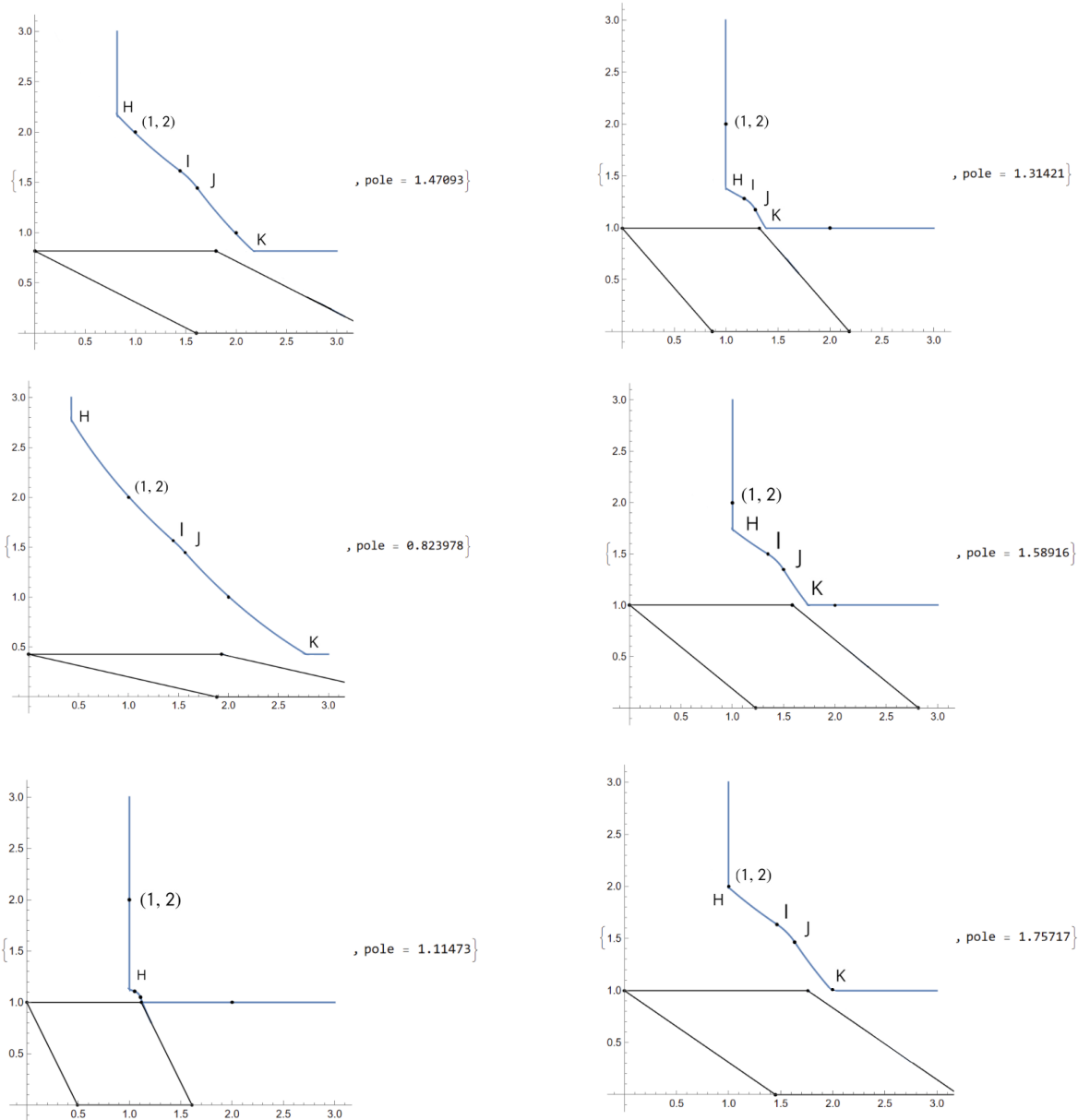
Hipoteza 4.1. *Niech $R(x, \alpha)$ będzie zbiorem punktów, składających się z obwiedni, przy przesuwaniu rombu o boku x i kącie ostrym α (jak niebieska linia na rysunku 4.6).*

Ustalmy prostokątny korytarz o szerokościach $a > 0$, $b > 0$ i $a < b$. Romb, który da się przesunąć przez taki korytarz i ma największe pole spełnia warunek:

Punkt H zbioru $R(x, \alpha)$ jest w (a, b) .

Jako przesłankę popierającą naszą hipotezę, podamy poniższe obliczenia dla przypadku $a = 1$ i $b = 2$.

Poniżej umieszczamy kod do programu Mathematica.



Rysunek 4.7: Wartość pola rombu w zależności od położenia $R(x, \alpha)$ względem punktu $(1, 2)$

```

                                kod 6
punkt[s_, {x_, y_}] := Graphics[{PointSize[s], Point[{x, y}]}]
odc[{x_, y_}, {s_, t_}] := Graphics[Line[{x, y}, {s, t}]]
Nn = 3;
bb = 2;
a[al_, bet_, x_] := {0, 2 x Cos[al/2] Sin[al/2 + bet]}
b[al_, bet_, x_] := {x Cos[bet], x Sin[al + bet]}
c[al_, bet_, x_] := {2 x Cos[bet + al/2] Cos[al/2], 0}
d[al_, bet_, x_] := {2 x Cos[al/2] Cos[bet + al/2] - x Cos[bet],
  x Sin[bet]}
ab[s_, al_, bet_, x_] := s a[al, bet, x] + (1 - s) b[al, bet, x]
bc[s_, al_, bet_, x_] := s b[al, bet, x] + (1 - s) c[al, bet, x]
Manipulate[Show[
  ParametricPlot[{y, x Sin[al]}, {y, x, Nn}],
  ParametricPlot[{x Sin[al], y}, {y, x, Nn}],
  ParametricPlot[{2 x Cos[al/2] Cos[bet]^2 Cos[al/2 + bet], -(1/4)
    x (-Sin[al - bet] - 3 Sin[bet] + Sin[3 bet] -
    4 Sin[al + bet] +
    Sin[al +
    3 bet])}, {bet, (2 ArcCos[(1 - Cos[al])/(2 Cos[al/2])]) -
    al)/4, Pi/2 - al}],
  ParametricPlot[{1/
    4 x (4 Cos[bet] + 3 Cos[al + bet] + Cos[3 (al + bet)] -
    2 Sin[bet] Sin[2 (al + bet)]),
    2 x Cos[al/2] Sin[al/2 + bet] Sin[al + bet]^2}, {bet, 0,
    Pi/2 - al - (2 ArcCos[(1 - Cos[al])/(2 Cos[al/2])]) - al)/4}],
  ParametricPlot[
    b[al, s, x], {s, (2 ArcCos[(1 - Cos[al])/(2 Cos[al/2])]) - al)/4,
    Pi/2 - al - (2 ArcCos[(1 - Cos[al])/(2 Cos[al/2])]) - al)/4},
  punkt[0.01, a[al, bet, x]],
  punkt[0.01, b[al, bet, x]],
  punkt[0.01, c[al, bet, x]],
  punkt[0.01, d[al, bet, x]],
  punkt[0.01,
    b[al, (2 ArcCos[(1 - Cos[al])/(2 Cos[al/2])]) - al)/4, x]],
  punkt[0.01,
    b[al, Pi/2 - al - (2 ArcCos[(1 - Cos[al])/(2 Cos[al/2])]) - al)/4,
    x]],
  odc[a[al, bet, x], b[al, bet, x]],
  odc[b[al, bet, x], c[al, bet, x]],
  odc[c[al, bet, x], d[al, bet, x]],
  odc[d[al, bet, x], a[al, bet, x]],
  punkt[0.01, {aa, bb}],
  punkt[0.01, {bb, aa}],
  PlotRange -> {{0, Nn}, {0, Nn}}, Axes -> True,
  AxesOrigin -> Automatic],
  "pole = " <> ToString[N[x^2 Sin[al]]], {al, 0.75, 0,
  Pi/2}, {{bet, 0}, 0, Pi/2 - al}, {{x, 1}, 0, Nn - 0.001}, {{aa, 1},
  0, Nn - 0.001}]

```

Listing 6: Wyznaczanie maksymalnej wartości pola rombu

§5 Spis rysunków i kodów

List of Listings

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Przesuwanie odcinka w nietypowym korytarzu | 10 |
| 2 | Wyznaczenie wartości najdłuższego boku dla $a = 5$, $b = 1$ i $c = 1$ | 12 |
| 3 | Wyznaczenie równań obwiedni | 16 |
| 4 | Wyznaczenie β_1 dla O_1 | 17 |
| 5 | Szukanie maksimum wyrażenia | 19 |
| 6 | Wyznaczanie maksymalnej wartości pola rombu | 21 |

Spis rysunków

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Kształty sof zaproponowane przez Hammersley'a (po lewej) i Gever'sa (po prawej) | 3 |
| 1.2 | Przesuwanie rombu http://www.math.uni.wroc.pl/\protect\unhbox\voidb@x\protect\penalty\@M\{}gismat/Roksana.gif | 3 |
| 2.1 | Przesuwanie odcinka | 5 |
| 2.2 | Wyznaczanie długości odcinka | 5 |
| 2.3 | Przypadek dla $a = b = 1$ | 7 |
| 2.4 | Przesuwanie odcinka w nietypowym korytarzu | 8 |
| 2.5 | Najdłuższy odcinek możliwy do przemieszczenia w nietypowym korytarzu | 9 |
| 3.1 | Przesuwanie prostokąta w korytarzu | 11 |
| 4.1 | Możliwe przesunięcia rombu | 13 |
| 4.2 | Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków A i C | 14 |
| 4.3 | Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków B i D | 15 |
| 4.4 | Przeszkoda przy przesuwaniu rombu | 15 |
| 4.5 | Minimalny korytarz dla ustalonego rombu | 17 |
| 4.6 | Minimalny korytarz dla ustalonego rombu | 18 |
| 4.7 | Wartość pola rombu w zależności od położenia $R(x, \alpha)$ względem punktu $(1, 2)$ | 20 |

Literatura

- [1] L. Moser, "Moving furniture through a hallway," *SIAM Review*, vol. 8, no. 3, p. 381, 1966.
- [2] J. L. Gerver, "On moving a sofa around a corner," *Geom. Dedicata*, vol. 42, no. 3, pp. 267–283, 1992. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF02414066>
- [3] C. Moretti, "Moving a couch around a corner," *The College Mathematics Journal*, vol. 33, no. 3, pp. 196–200, 2002.
- [4] G. Eriksson, H. Eriksson, and K. Eriksson, "Moving a food trolley around a corner," *Theoretical computer science*, vol. 191, no. 1, pp. 193–204, 1998.

- [5] G. P. Vennebush, “Move that sofa!” *The Mathematics Teacher*, vol. 95, no. 2, pp. 92–97, 2002.