Toruń, 31. 03. 2015 r.

prof. dr hab. Mariusz Lemańczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Z-ca Dyrektora Instytutu Matematycznego
Uniwersytetu Wrocławskiego
prof. dr hab. Krzysztof Dębicki

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Łukasza Garncarka pt. „Reprezentacje brzegowe grup hiperbolicznych"

Rozprawa doktorska mgr. Łukasza Garncarka poświęcona jest badaniu nieprzywiedlności reprezentacji (quasi)-regularnych dowolnej nieelementarnej (różnej od skończonego rozszerzenia grupy cyklicznej) grupy hiperbolicznej Γ na swoim brzegu $\partial\Gamma$, tzn. reprezentacji zadanej wzorem:

$$\pi(g)(f) = f \circ g^{-1} \cdot \left(\frac{dg_*\mu}{d\mu}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

gdzie $f \in L^2(\partial\Gamma, \mu)$, μ zaś jest odpowiednią miarą Hausdorffa stowarzyszoną z metryką hiperboliczną (tzw. miarą Pattersona-Sullivana, dla skrótu, będę dalej pisał o miarach PS). Ponieważ miary Hausdorffa, które się tu pojawiają zależą od metryk, co więcej, dla różnych metryk, mogą być one wzajemnie osobliwe, prowadzi to do kolejnego (po nieprzywiedlności) zagadnienia rozważanego w rozprawie, a mianowicie rozstrzygnięcia, kiedy takie reprezentacje mogą być równoważne.

Przypomnijmy, że zagadnienie nieprzywiedlności reprezentacji Koopmana, tzn. reprezentacji wyznaczonych przez zachowujące miarę działania punktowe grup $g \mapsto T_g$ na przestrzeniach probabilistycznych $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (we wzorze (1)) pochodna Radona-Nikodyma jest 1) jest bardzo klasyczną częścią teorii ergodycznej (teoria spektralna układów dynamicznych). Oczywiście ogólniejszą sytuacją jest rozpatrywanie tzw. niesingularnych działań grup, wtedy obraz $g_*\mu = (T_g)_*\mu$ miary μ poprzez T_g jest równoważny z miarą μ - taka właśnie jest sytuacja w rozprawie - gdy rozpatrujemy reprezentacje (unitarne) zadane wzorem (1). Oczywiście, jeśli grupa Γ jest zbyt „porządna", np. $\mathbf{Z}$, czy $\mathbf{R}$, a ogólniej, gdy grupa Γ jest typu I (tzn. na zbiorze $\widehat{\Gamma}$ klas równoważności reprezentacji nieprzywiedlnych istnieje naturalna struktura borelowska), zagadnienie nieprzywiedlności stowarzyszonych reprezentacji nie jest zagadnieniem interesującym: każda taka reprezentacja z dokładnością do krotności jest wyznaczona przez klasę równoważności pewnej miary na $\widehat{\Gamma}$, a każda miara na $\widehat{\Gamma}$ wyznacza reprezentację - stąd po prostu nie ma nietrywialnych reprezentacji nieprzywiedlnych.

Sytuacja oczywiście się zmienia, gdy rozpatrujemy przypadek grup różnych od typu I. (Rozpatrywane w rozprawie (nieelementarne) grupy hiperboliczne nie są typu I.) Konstrukcje brzegu takiej grupy i stowarzyszonych miar quasi-konforemnych (patrz poniżej), o których wiedziano, że w pewnych sytuacjach prowadzą do reprezentacji nieprzywiedlnych, doprowadziły niedawno Badera i Muchnika do ogólnego pytania, czy dla wszystkich grup lokalnie zwartych i miary probabilistycznej (spełniającej pewien dodatkowy warunek na nośnik) stowarzyszona reprezentacja quasi-regularna (1) jest nieprzywiedlna. **Rozprawa doktorska Ł. Garncarka stanowi w mojej ocenie istotny postęp w tej problematyce.**

W rozprawie rozpatruje się grupy Γ skończenie generowane. Jeśli S jest skończonym generatorem grupy Γ, to na grafie Cayleya $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ (krawędzie $\{g, gs\}$ są pomiędzy wierzchołkami g i gs) rozpatruje się naturalną metrykę słów d_S. Zauważmy ponadto, że działanie Γ na $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ poprzez lewostronne translacje jest izometryczne. Mówimy, ze Γ jest hiperboliczna, gdy dla wszystkich skończonych (równoważnie, jednego S) zbiorów generujacych S, $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ z metryką słów jest przestrzenią hiperboliczną, tzn. spełnia warunek

$$(x, y) \geqslant \min\{(x, z), (z, y)\} - \delta, \tag{2}$$

gdzie (x, y) oznacza produkt Gromowa dla metryki d. Następnie brzegiem $\partial\Gamma$ grupy Γ nazywamy brzeg dowolnego grafu $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$, tzn. klasy równoważności promieni geodezyjnych, powiedzmy startujących z elementu neutralnego 1_G (są to więc promienie geodezyjne, które są „równoległe", w sensie takim, że $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant C$). Ponieważ Γ działa na grafie Cayleya w sposob izometryczny, więc Γ zachowuje równoważność promieni geodezyjnych i stąd mamy działanie grupy Γ na przestrzeni $\partial\Gamma$. W końcu zauważmy, że na brzegu $\partial\Gamma$ mamy naturalną metrykę (tzw. wizualną) d_ε, spełniającą warunek

$$d_\epsilon(\xi,\eta) \asymp e^{-\varepsilon(\xi,\eta)}$$

($\varepsilon > 0$ trzeba wziąć dostatecznie małe, aby otrzymać nierówność trójkąta), gdzie

$$(\xi,\eta) = \sup_{\xi=[\gamma_1],\eta=[\gamma_2]} \liminf_{t\to\infty}(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

jest produktem Gromowa na brzegu.

Powyższe rozważania można przeprowadzić w szerszej klasie metryk d na Γ. A mianowicie, w rozprawie rozpatruje się metryki $d \in \mathcal{D}(\Gamma)$, tzn. metryki spełniające następujące warunki:

- d jest hiperboliczna, tzn. spełnia (2) (zamiast geodezyjnych rozważa się tzw. *szorstkie geodezyjne*, tzn. $\gamma : I \to \Gamma$, $|d(\gamma(s),\gamma(t)) - |s-t|| \leqslant C$, dla których odpowiednia równoważność w połączeniu z warunkiem poniżej, prowadzi do tego samego brzegu $\partial\Gamma$ (co dla metryk słownych) i metryki wizualnej na $\partial\Gamma$),

- d jest quasi-izometryczna z d_S (ten warunek zapewnia istnienie wystarczająco wielu szorstkich geodezyjnych),

- d jest lewostronnie niezmiennicza (wówczas Γ działa na grafie Cayleya przez izometrie i zachowuje relacje asymptotyczności szorstkich promieni geodezyjnych, a zatem daje naturalne działanie Γ na $\partial\Gamma$).

Z każdą z tak otrzymanych metryk wizualnych można stowarzyszyć naturalną miarę konforemną μ (tzw. miarę PS), których teoria została zapoczątkowana niedawno pracą Blachere'a, Haissinsky'ego i Matthieu (2011). Działanie grupy Γ na przestrzeni $(\partial\Gamma,\mu)$ jest niesingularne, w istocie rzeczy mamy nawet warunek quasi-konforemnosci

$$\frac{dg_*\mu}{d\mu}(\xi) \asymp \omega^{2(g,\xi)-|g|} \quad \text{dla } \xi \in \partial\Gamma, \tag{3}$$

gdzie (g,ξ) jest produktem Gromowa ($(g,\xi) = \sup_{[\gamma]=\xi}\liminf_{t\to\infty}(\gamma(t),g)$), a $|g|$ jest odległością g od 1_G. Z quasi-konforemności wynika, że $\mu(B(\xi,r)) \asymp r^D$ (dla pewnego $D = D(\omega) > 0$) i zatem μ będzie równoważna mierze Hausdorffa (z wykładnikiem D). Ponadto wiadomo, że jeśli ν jest miarą na brzegu spełniającą warunek (3), to $\nu \equiv \mu$ (a nawet $\frac{d\nu}{d\mu} \asymp 1$). Wynika stąd, że miara absolutnie ciągła względem miary Pattersona-Sullivana niewiele zmieniająca pochodną Radona-Nikodyma działania grupy G musi być równoważna z μ. Stąd natychmiast otrzymujemy ergodyczność miar PS (rzeczywiście, wystarczy rozpatrzeć obcięcie miary PS do hipotetycznego podzbioru niezmienniczego).

Głównym rezultatem rozprawy jest istotne wzmocnienie własności ergodyczności, a mianowicie głębokie Theorem 3.5.2 orzekające, że dla każdej metryki $d \in \mathcal{D}(\Gamma)$ stowarzyszona reprezentacja quasi-regularna (1) jest nieprzywiedlna. Idea dowodu polega na „dodatniej" aproksymowalności (patrz poniżej) operatorów T_K, $K \in L^\infty((\partial\Gamma)^2, \mu \otimes \mu)$, na $L^2(\partial\Gamma, \mu)$ zadanych (słabo) wzorem

$$\langle T_K f, g\rangle = \int_{(\partial\Gamma)^2} f(x)\overline{g(y)}K(x,y)\, d\mu(x)d\mu(y).$$

Głęboki (i zaskakujacy) rezultat został zawarty w Proposition 3.4.4, które stwierdza, że wszystkie operatory T_K z jądrem $K \geqslant 0$ leżą w dodatnim stożku $PC(\pi)$ wyznaczonym przez $\pi(g)$, $g \in \Gamma$, tzn.

$$T_K \in \operatorname{clos}\left(\left\{\sum_i \alpha_i \pi(g_i);\ g_i \in \Gamma, \alpha_i \geqslant 0\right\}\right).$$

Jeśli już ma się Proposition 3.4.4, to dowód głównego rezultatu przebiega wg schematu standardowego, a mianowicie, wówczas wszystkie operatory T_K należą do algebry von Neumanna reprezentacji π, a ponieważ operatów postaci T_K jest „zbyt wiele", więc generują one całą algebrę $B(L^2(\partial\Gamma, \mu))$ operatorów liniowych i ograniczonych na $L^2(\partial\Gamma, \mu)$. Stąd algebra von Neumanna generowana przez $\{\pi(g);\ g \in \Gamma\}$ jest równa $B(L^2(\partial\Gamma, \mu))$, a więc reprezentacja π jest nieprzywiedlna.

Z kolei dowód Proposition 3.4.4 wymagał pomocniczych rezultatów, które dla recenzenta są zarówno zaskakujące, jak i charakteryujące się niezwykłą matematyczną elegancją. Pierwszy z tych rezultatów pomocniczych, to rozszerzenie klasycznego lematu o cieniu rzucanym przez elementy w pierścieniu kołowym na brzeg ($g \mapsto \widehat{g} \in \partial\Gamma$) na tzw. lemat o podwójnym cieniu, który w zasadzie sprowadza się do tego, że pary $(\widehat{g}, \widehat{g^{-1}})$ są równomiernie rozłożone w kwadracie kartezjanskim $\partial\Gamma \times \partial\Gamma$ (zdumiewający rezultat). Drugim zaś rezultatem jest Lemma 3.3.4, tzw. lemat o skracaniu słów, dający w przypadku (nieelementarnych) grup hiperbolicznych uniwersalną stałą, o którą możemy modyfikować słowo $g \in \Gamma$ w reprezentacji literowej zadanej przez zbiór generatorów S, zapobiegającą skracaniu słów gh, przy dowolnym $h \in \Gamma$ (kolejny zdumiewający rezultat, który wydaje się jasny jedynie w przypadku grup wolnych).

Ponieważ miary PS pochodzące od różnych metryk mogą być wzajemnie osobliwe, naturalnym jest pytanie, kiedy pochodzące od tych miar reprezentacje quasi-regularne są równoważne. Drugi najważniejszy rezultat rozprawy, Theorem 3.6.5, w zasadzie orzeka, że te reprezentacje są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy miary PS są równoważne (dorzucając równoważny warunek geometryczny na szorstkie podobieństwo metryk). Równoważność tych warunków zachodzi przy podwójnej ergodyczności miar Pattersona-Sullivana, tzn. ergodyczności działania $\Gamma \ni g \mapsto (g, g) \in \Gamma \times \Gamma$ dla miary $\mu \otimes \mu$ (dla działań niesingularnych, w przeciwieństwie do klasycznej teorii ergodycznej, nie ma żadnych warunków wymuszjących ergodyczność działań diagonalnych wyższego rzędu z ergodyczności takich działań rzędu niższego). Status rezultatu o podwójnej ergodycznosci miar PS zaanonsowanego przed ponad rokiem przez Badera i Furmana pozostaje niejasny (doktorant znalazł luki w pierwszej wersji dowodu Badera i Furmana). Niemniej twierdzenie pana Garncarka stosuje się np. w sytuacji grup typu CAT(-1), a najprawdopodobniej w sytuacji bardzo ogólnej. Małą perełką w dowodzie Theorem 3.6.5 jest fakt, że pomimo tego, że niesingularne działanie grupy Γ na brzegu jest typu III, działanie diagonalne grupy Γ na $((\partial\Gamma)^2, \mu\otimes\mu)$ jest typu II_∞, tzn. posiada nieskończoną miarę niezmienniczą, równoważną z miarą $\mu \otimes \mu$ (nie jest dla recenzenta jasne, czy tego typu zjawisko jest w ogóle możliwe w przypadku dzialan grup np. abelowych). Dzięki założeniu podwójnej ergodyczności ta (ergodyczna) miara niezmiennicza będzie jedyna (standardowa), co odgrywa ważną rolę w dowodzie Theorem 3.6.5.

Przedstawiona rozprawa doktorska jest na bardzo wysokim poziomie naukowym, a uzyskane wyniki są na poziomie światowym. Na podkreślenie zasługuje też ogromna erudycja matematyczna mgr. Ł. Garncarka. Uważam, że ze względu na wysoką wartość naukową osiągniętych wyników recenzowana rozprawa doktorska w pełni zasługuje na wysokie **wyróżnienie**.

Konkluzja: Uważam, że przedkładana rozprawa doktorska spełnia wszystkie wymogi ustawowe i zwyczajowe potrzebne do uzyskania stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnoszę zatem o dopuszczenie mgr. Łukasza Garncarka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Marian