Prof. dr hab. Piotr Koszmider,
Instytut Matematyczny,
Polskiej Akademii Nauk.

16 sierpnia 2014r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MAGISTRA WOJCIECHA STADNICKIEGO PT. "AKSJOMATYZACJA MODELU MATHIASA W TERMINACH GIER"

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Głównym tematem pracy doktorskiej Pana Wojciecha Stadnickiego jest próba stworzenia aksjomatyki funkcjonującej w modelu Mathiasa na podobnych zasadach do tej otrzymanej przez K. Ciesielskiego i J. Pawlikowskiego dla modelu Sacksa.

W obu przypadkach mowa o modelach teorii mnogości ZFC otrzymanych z modelu hipotezy kontinuum przy pomocy iteracji z przeliczalnymi nośnikami, odpowiednio forcingu Mathiasa lub forcingu Sacksa. W obu przypadkach celem jest rozwinięcie nowego języka do badania tych modeli i zastąpienie długich, wielokrotie powtarzających się argumentów wymagających znajomości forcingu poprzez nowe kanoniczne rozumowania nie wymagające przechodzenia od modelu do modelu czy znajomości logiki. To uporządkowanie może też prowadzić do nowych wyników w tych modelach. Należy dodać, że powyższe aksjomatyki jak żadne inne spełniające założenia twierdzenia Gödla o niezupełności nie obejmują całej prawdy w modelu Mathiasa, dodatkowo, model Mathiasa nie jest jednoznacznie określony bowiem zależy od modelu wyjściowego iteracji. Zatem przez aksjomatyzacje należy rozumieć kolekcje aksjomatów przy pomocy, których da się udowodnić większość obecnie znanych i interesujących faktów zachodzących w tej klasie modeli.

Forcing Mathiasa pojawił się w artykule *A. Mathias, Happy families. Ann. Math. Logic 12 (1977), no. 1, 59-111.* Od tego momentu wielu matematyków stosowało model otrzymany przez iteracje tego forcingu o długości ω_2 z przeliczalnymi nośnikami w celu udowodnienia niesprzeczności przeróżnych hipotez matematycznych.

Podobne badania przeprowadzone były dla innego modelu zwanego modelem Saksa. W książce "*K. Cieselski, J. Pawlikowski, The covering property axiom, CPA. A combinatorial core of the iterated perfect set model.*

Cambridge Tracts in Mathematics, 164. Cambridge University Press, Cambridge, 2004 autorzy zaproponowali nowatorskie podejście do modelu Saksa. Zaproponowali aby zamiast dowodzić prawdziwości różnych matematycznych stwierdzeń w tym modelu w oparciu o konstrukcje modelu, wprowadzić grupe aksjomatów, których natura odpowiadałaby konstrukcji modelu a zatem pozwalała na nieodwoływanie się do dość technicznych podstaw, które nie mają dużo wspólnego z treścią zdań, których prawdziwość w modelu się udowadnia.

W rozprawie proponuje się podobne podejście do modelu Mathiasa. Doktorant prezentuje wiele wersji aksjomatów, wyprowadza z nich różnorodne konkluzje, co do których wiadomo że zachodzą w modelu Mathiasa, a także otrzymuje nowe wyniki niesprzeczności. Należy zauważyć, iż J. Zapletal rozważał wersje aksjomatów typu Ciesielskiego i Pawlikowskiego w stosunku do innych forcingów czy ideałów, ale jego podejście nie da się zastosować do forcingu Mathiasa co wynika z rezultatów otrzymanych przez M. Saboka.

2. Omówienie wyników rozprawy doktorskiej

Nie powtarzając bardziej technicznych sformułowań, poniżej omawiam poszczególne części rozprawy.

W rodziale pierwszym mamy ogólne omówienie rozprawy oraz wstęp historyczny, jednak nie ma w nim mowy o pochodzeniu forcingu Mathiasa lub modelu Mathiasa, rodział drugi wprowadza używane pojęcia dotyczące forcingów, ich iteracji, algebr Boole'a, foringu Mathiasa. Recenzent obawia się, że brak wymogu aby model wyjściowy spełniał hipotezę kontinuum i twierdzenie iż możemy założyć to bez straty ogólności może powodować komplikacje w bardziej szczegółowo przeprowadzanych dowodach ze względu na konieczność rozważania przypadku kolapsowania liczb kardynalnych. Wydaje się, że bezpieczniej byłoby założyć hipoteze kontinuum w modelu wyjściowym pomimo tego, że zawsze gdy iterujemy nietrywialne forcingi z przeliczalnymi nośnikami, kolapsujemy kontinuum do ω_1 po ω_1 krokach.

W trzecim rozdziale konstruuje się forcing równoważny iteracji forcingów Mathiasa po to by móc stosować nowy język. To zreformułowanie opiera się na ideach Ciesielskiego i Pawlikowskiego oraz Spinasa i Shelaha. Rozdział ten w kwestiach technicznych istotnie opiera się na artykule *S. Shelah, O. Spinas, The distributivity numbers of $P(\omega)/fin$ and its square. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 5, 2023–2047.* Główny krok to zastąpienie warunków iteracji borleowskimi funkcjami bez odnoszenia się do nazw w iteracji. Tylko proste przypadki rozważone są ze szczegółami.

W czwartym rozdziale wprowadzona jest gra CPA oraz aksjomat CPA, który mówi że jednen z graczy (Ewa) nie ma strategii wygrywającej oraz nieprawdziwa jest hipoteza kontinuum. Gra ma ω_1 kroków i polega na kolejnym wybieraniu przez Adama trójki: liczba porządkowa przeliczalna α, podzbiór borelowski $([\omega]^\omega)^\alpha$ (z topologią produktową a $[\omega]^\omega$ z topologią otrzymaną przez utożsamienie z 2^ω) z poza pewnego ideału i funkcja borelowska z tego zbioru w 2^ω i odpowiedzi Ewy w postaci podzbioru borelowskiego zbioru wybranego przez Adama. Adam wygrywa gdy po zakończeniu gry suma obrazów wybranych przez Ewę zbiorów przy funkcjach Adama z tych samych kroków gry jest równa 2^ω. Następnie pokazuje się że aksjomat CPA zachodzi w modelu Mathiasa korzystając z równoważnego sformułowania iteracji z poprzednego rozdziału. Potem autor wyprowadza pierwsze konsekwencje aksjomatu CPA.

W rodziale piątym wprowadzona jest modyfikacja aksjomatu CPA oznaczana CPAs, z której wyprowadzone jest kilka sztandarowych faktów zachodzących w modelu Mathiasa jak na przykład hipoteza Borela.

W szóstym i siódmym rozdziale rozważa się znów inne wersje aksjomatu CPA i wyprowadza z nich kolejne konsekwencje. W rozdziale ósmym wprowadza się wspólne wzmocnienie poprzednich aksomatów. Jednak autor nie ulega pokusie rozstrzygnięcia w pełni wzajemnych powiązań logicznych wszystkich rozważanych aksjomatów.

Rozdział dziewiąty dotyczy V-ultrafiltrów i prezentuje nowy łatwy dowód w oparciu o aksjomatykę pewnych wyników z pracy Spinasa i Shelaha.

W rozdziale dziesiątym wprowadza się wersje aksjomatu CPA z której wynika aksjomat $\clubsuit$ Ostaszewskiego.

3. Konkluzja

Praca zawiera wiele literówek, nie zawiera za to indeksu pojęć ani spisu oznaczeń. Wydaje się, że nigdzie nie jest wyjaśnione rozwinięcie skrótu CPA. W kwestii terminologii, conajmniej w wersji skrótowej dubluje się terminologie dotyczącą modelu Sacksa. Wiele dowodów jest częściowych lub szkicowych, ale wydaje się to być całkowicie uzasadnione charakterem rozprawy, która skupia się na wprowadzeniu nowego języka, zatem wiele treści jest już obecnych w literaturze (głównie w pracach Spinasa i Shelaha oraz Ciesielskiego i Pawlikowskiego). Nawiązuje ona także do podobnego projektu Ciesielskiego i Pawlikowskiego w przypadku forcingu Sacksa. Jednakże realizacja podobnego projektu w kontekście forcingu Mathiasa jest dość wymagająca. Do wykonania tego projektu doktorant musiał posiąść dogłębnie tajniki forcingu iterowanego i wielu zagadnień z kombinatorycznej i opisowej teorii mnogości, następnie musiał opanować na mistrzowskim poziomie kilka trudnych pozycji z aktualnej literatury. Na koniec doktorant pokazał kreatywne wykorzystanie przyswojonych idei w nowym, ważnym i interesującym kontekście.

Terminy dotyczące sporządzenia recenzji uniemożliwiają większe zagłębienie się w stronę bardziej techniczną recenzowej rozprawy. W szczególności, bez dokładnego przestudiowania pracy Shelaha i Spinasa trudno mi ocenić na ile nowatorski jest aspekt techniczny takiej a nie innej pracy z forcingiem równoważnym iteracji forcingu Mathiasa. A bez zagłębienia się w kilka prac i w książke Ciesielskiego i Pawlikowskiego trudno ocenić stopień kreatywności potrzebny w zastosowaniach nowych aksjomatów. Nie mniej, bez wątpienia ta nowatorskość jest na pewno nie mniejsza niż we wielu uznanych projektach. Mam nadzieje że podczas obrony ta kwestia wyjaśni się bardziej.

Rozprawa jest bardzo ciekawa, nowatorski projekt jest przeprowadzony profesjonalnie, wyniki wpisują się bardzo dobrze w istniejącą literature i aktualne tematyki badań w kilku ośrodkach naukowych. Uważam, że wyniki te będą istotnie oddziaływać.

Stwierdzam, że rozprawa spełnia wszystkie wymogi Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnoszę o dopuszczenie Pana magistra Wojciecha Stadnickiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Koszmider