Recenzja pracy doktorskiej magistra Michała Marcinkowskiego

Hipoteza Gromowa o dodatniej krzywiźnie i wymiernie nieistotne makroskopowo duże rozmaitości. Parkietaże rozmaitości i jednostajnie skończone homologie.

Złożona w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego rozprawa doktorska pana Michała Marcinkowskiego napisana jest w języku angielskim, liczy 43 strony wraz z bibliografią. Promotorem doktoranta jest dr hab. Światosław Gal z IM UWr, a promotorem pomocniczym dr Piotr Nowak z IM PAN.

Podzielona jest ona ona na dwa rozdziały odpowiadające dwom częściom tytułu pracy a badane problemy i techniki albo należą do geometrycznej teorii grup, albo do tej części topologii, która wyrosła i była stosowana do opisu własności globalnych rozmaitości różniczkowych związanych z badaniem istnienia określonych struktur geometrii różniczkowej. Po rozdziale pierwszym umieszczony jest krótki dodatek do tego rozdziału.

Inspiracją dla tej pracy są hipotezy M. Gromowa i A. Dranisznikowa, o tyle związanych ze sobą, że ta druga powstałą przy badaniu tej pierwszej. W rozprawie doktorskiej daje się rozstrzygającą odpowiedź na tę drugą, historycznie młodszą hipotezę, konstruując klasę rozmaitości zaprzeczającej jej tezie. W odniesieniu do pierwszej hipotezy pokazuje się, nie istnienie metryki Riemanna od dodatniej krzywiźnie skalarnej dla rodziny rozmaitości skonstruowanej na potrzebę wykazania fałszywości tej drugiej, poprzez wykazanie, że jest ona podrodziną spin rozmaitości, dla których wiadomo było wcześniej, że hipoteza Gromowa jest prawdziwa.

Jeśli chodzi o stosowane techniki matematyczne w omawianej pracy to jest ona wzorcowym produktem szkoły wrocławskiej: od teorii małych nakryć Davisa-Januszkiewicza i kompleksów Davisa dla grup Coxetera wykorzystanej w konstrukcji rozmaitości przeczących hipotezie Dranisznikowa, do kryterium Hulanickiego-Reitera sumowalności grupy wykorzystywanym przy dowodzie istnienia aperiodycznych parkietaży grup dla skończenie generowanych.

Przejdźmy teraz do szczegółowego omówienia treści pracy. Jak już wspomnieliśmy autor rozprawy postawił sobie problem zbadania hipotezy A. Draniszknikowa, która brzmiała: "Jeśli rozmaitość M, wymiaru n jest wymiernie nieistotna, to nie jest makroskopowo duża". To pierwsze oznacza, że $H_n(f)([M]) = 0$ w $H_n(B\pi_1(M); Q)$, gdzie $f : \tilde{M} \to B\pi_1(M)$ to odwzorowanie klasyfikujące nakrycie uniwersalne $\pi : \tilde{M} \to M$, a $[M]$ klasa fundamentalna rozmaitości $[M]$. Z kolei M jest makroskopowo duża oznacza, że nie istnieje odwzorowanie $\phi : \tilde{M} \to K$ o jednostajnie ograniczonych przeciw-obrazach punktów gdzie K jest kompleksem $n-1$ wymiarowym. Inaczej mówiąc hipoteza twierdziła, że jeśli rozmaitość M jest wymiernie nieistotna, to jej wymiar makroskopowy spełnia $\dim_{mac}(M) \leqslant n-1$. W rozdziale pierwszym konstruuje rodzinę rozmaitości M_n^k takich, że każda $\dim M_n^k$, jest jest wymiernie nieistotna, ale makroskopowo duża tj. $\dim_{mac}(M_n^k) = n$.

Konstrukcja tych rozmaitości jest nietrywialna i z grubsza można ją opisać następująco (Podrozdział 1.3.1):

- najpierw w n-dysku D_0^n wycina się wnętrza $k-1$-małych dysków D_i^n, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $k \geqslant 2$, i następnie utożsamia sie brzeg D_0^n z brzegiem każdego D_i^n poprzez zachowujący orientację homeomorfizm. Powstaje kompleks L_k^n będący rozmaitością ze strukturą pochodzącą z D_0^n poza $S := \iota(\partial D_0^n)$ gdzie jest k-rozgałęzionym nakryciem.

- Wybór triangulacji na $L = L_k^n$ oraz funkcji charakterystycznej $\lambda : L^{[0]} \to \mathbb{Z}_2^{n+1}$ definiuje kompleks dualny L^* , a następnie pozwala określić tak zwaną przestrzeń nakrywającą M_L wraz z działaniem wolnym grupy $G = \mathbb{Z}_2^{n+1}$ i przestrzenią orbit równą stożkowi $C(L^*)$. (tutaj jest to małe nakrycie, gdyż wymiar G nad $\mathbb{Z}_2$ jest równy $n+1$).

- W badanej sytuacji $\pi_1(M_L$ jest podgrupą skończonego indeksu w prawo kątnej grupie Coxetera W_L stowarzyszonej z kompleksem L . Wiadomo, że M_L jest asferyczne a nakrycie uniwersalne M_L jest równe kompleksowi Davisa odpowiadającemu grupie W_Li jest rozmaitością gdy $L = S$ jest sferą.

- następnie wykorzystując podkompleks M_S definiuje się łańcuch $M_S^{01} = M_S^0 - M_S^1$ w, który wyznacza n-cykl, a stąd klasę $[M_S^{01}]$ w $H_N(L;\mathbb{Z})$.

- Kolejno bierze się rozmaitość $N = M_S^0\#(-M_S^1)$. Z konstrukcji wynika, że istnieje $f_N : N \to M_L$, takie, że $H_*f_N([N]) = [M_S^{01}]$.

- Kolejnym krokiem jest homotopijne poprawienie N if_N do trójki $f : M_n^k \to M_L$ poprzez zastosowanie chirurgii, tak że $H_(f)[M_n^k = [M_S^{01}]$ przy zauważeniu, że M_L jako asferyczna jest przestrzenią klasyfikującą $\pi_1(M_n^k) = W_L$.

- Ostatnim krokiem potrzebnym do wykazania, że M_n^k daje oczekiwany kontrprzykład jest sprawdzenie, że:

a) klasa $[M_S^{01}]$ jest elementem torsyjnym rzędu k w $H_*(M_L;\mathbb{Z})$, co gwarantuje, żę M_n^k jest istotna (tj. nad $\mathbb{Z}$ ale nie wymiernie istotna.

b) "coarse evalution" ec$([M^{01}]) \neq 0$ w $H_n^{lf}(\tilde{M}_L;\mathbb{Z})$, co wraz z twierdzeniem Dranisznikowa pokazuje, że M_n^k jest makroskopowo duże.

Jak widać, z tego pobieżnego opisu konstrukcja tego przykładu jest dalece nietrywialna i wymaga po pierwsze pomysłu ogólnego, a po drugie jego konsekwentnej realizacji wymagającej znajomości kilku skomplikowanych technik i sprawnego posługiwania się nimi. To świadczy zarówno o dobrym wykształceniu doktoranta jaki i jego talencie matematycznym.

W rozdziale pierwszym autor podaje też inną konstrukcję rozmaitości oznaczanych $M(L, S)$ wymiernie nieistotnych i makroskopowo dużych. Jest to konstrukcja bardziej ogólna, bardziej "kategoryjna". Nie posiadają one jednak pewnych własności przysługujących omawianym wcześniej rozmaitościom M_n^k. Te ostatnie rozmaitości dopuszczają spin strukturę, co pokazuje autor poprzez wykazanie, że wszystkie niezerowe klasy Whitneya M_S, a w konsekwencji M_n^k, są równe zeru.

Jak wspominaliśmy, w omawianej pracy doktorskiej dyskutuje się następującą hipotezę Gromowa: "Jeśli zamknięta zwarta rozmaitość M wymiaru n posiada metrykę Riemanna z dodatnią krzywizną skalarną, to $\dim_{mac}(M) \leqslant n-2$, w słabej wersji $\dim_{mac}(M) \leqslant n-1$".

Istnienie spin struktury wraz z faktem spełniania innych założeń twierdzenia Bolotowa-Dranisznikowa podającego warunki dostateczne na spin rozmaitość aby spełniała hipotezę Gromowa, pozwala zastosować to ostatnie i w konsekwencji otrzymać przez zaprzeczenie wniosek: "Rozmaitości M_n^k nie dopuszczają metryki riemannowskiej z dodatnią krzywizną skalarną ". Wspomniane założenia to warunki na grupę fundamentalną spin-rozmaitości (tutaj są to nietrywialne fakty o grupach Coxetera, ale znane w literaturze).

Przejdźmy do omówienia treści Rozdziału Drugiego. Magister Marcinkowski wykazuje w nim istnienie aperiodycznych parkietaży dla nakrycia $\tilde{M} \to M$, M zwarte, ze skończenie generowaną grupą transformacji nakrycia G. Jest to modyfikacja klasycznego podejścia Blocka-Weinbergera, którzy podali taką konstrukcję w przypadku, gdy G nie jest średniowalna. Autor po pierwsze dokładnie i systematycznie prezentuje ich metodę wykorzystującą jednostajnie skończone homologie, wprowadzając jednoczęsnie własne uproszczenia. W rezultacie otrzymuje on nawet dla grup nieśredniwalnych mocniejsze stwierdzenie: "Dla dowolnej podgrupy izometrii G' każdego takiego parkietażu, grupa ilorazowa G/G' nie może być średniowalna".

Istotnym wkładem autora rozprawy jest pokazanie, że używając zmodyfikowanej przez siebie metody Blocka-Wienbergera można wykazać istnienie aperiodycznego parkietażu dla pewnej klasy skończenie generowanych średniowalnych grup. Klasa ta jest opisana warunkiem: istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdej podgrupy skończonego indeksu $[G : H]$ p nie dzieli $[G : H]$. Następnie autor podaje przykłady klas podgrup spełniających ten warunek. Jedną z takich klas są grupy Grigorczuka pośredniego wzrostu (pomiędzy wielomianowym a wykładnicznym) gdyż są one średniowalnymi, rezydualnie średniowalnymi, skończenie generowanymi torsyjnymi 2-grupami. Wystarczy więc wziąć $p = 3$, albo inną liczbę pierwszą nieparzystą.

Wyniki Rozdziału drugiego dobrze uzupełniają główny rezultat pracD zawarty w Rozdziale Pierwszym gdyż pokazują, iż autor opanował twórczo inną cześć geometrycznej teorii grup - technicznie bardziej zbliżoną do metod teorii sumowalności, a więc analizy.

Podsumowując ocenę merytorycznej zawartości omawianej pracy należy podkreślić, że zawiera rozstrzygającą odpowiedź na pytanie (hipotezę) jednego z liderów tej tematyki. Złożoność konstrukcji przykładu, a właściwie kontrprzykładu na tezę hipotezy, dobrze wyjaśnia dlaczego sam Dranisznikow i jego współpracownicy nie byli w stanie tego rozstrzygnąć. Pozostałe wyniki są też ciekawe i rozszerzają stan wiedzy na badane problemy. Tak więc przedstawiona rozprawa doktorska jest przykładem klasycznej pracy doktorskiej z matematyki zawierającej rozwiązanie problemu - choć omawia praca zawiera jeszcze wyniki uzupełniające ten główny i wyniki na temat parkietaży aperiodycznych przedstawione w rozdziale drugim.

W ocenie formalnej strony omawianej pracy należy podkreślić jej zwięzłość redakcyjną co czyni ją przyjemną do czytania, o ile potencjalny czytelnik zna podstawy i język topologii algebraicznej i geometrycznej gdyż w kilku miejscach korzysta się bez wytłumaczenia z "dobrze znanych faktów", które właściwie nie mają odnośników gdyż są dobrze znane w "folklorze". Być może dołożenie dodatku z dodatkowymi informacjami ułatwiło by jej percepcje nie tylko specjalistom z dziedziny prezentowanej przez doktoranta. Z błędów, które zauważyłem można wytknąć stwierdzenie zawarte we wstępie, i powtórzone później:"Here we are able to establish the Gromov conjecture only for a subclass of manifolds we construct." Otóż autor nie potwierdza tej hipotezy dla skonstruowanej przez siebie klasy n-rozmaitości, ale sprawdza, że klasa ta zawarta jest w klasie spin rozmaitości, dla której Bolotov i Dranisznikow wykazali, że hipoteza Gromowa jest prawdziwa. W związku z tym, o ile istniała by metryka Riemanna o dodatniej krzywiźnie skalarnej, to rozmaitości miałyby wymiar makroskopowy $\leqslant n - 2$, a to przeczy temu co wykazał wcześniej autor, czyli naprawdę pokazuje on, że dla skonstruowane przez niego rozmaitości nie dopuszczają metryki o dodatniej krzywiźnie skalarnej, wykazując, iż spełnia ona założenia tw. Bolotowa i Dranisznikowa.

Inny błąd, tym razem będącym konsekwencją niedbałości redakcyjnej jest, jest zawarty w sformułowaniu "Example 1" . Otóż dla nakrycia torusa z usuniętym punktem nakryciem jest $\tilde{T}' = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$. Aby pokazać, że rozmaitość ma wymiar makroskopowy 1 należy podać odwzorowanie jednostajnie ograniczone w kompleks wymiaru 1. W pracy określone jest odwzorowanie $f : \tilde{T}' \to \Gamma$ (branie najbliższego punktu, ale nieskończony ”ruszt” (1-kompleks) Γ powinien być postaci $(\{1/2 + \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{1/2 + \mathbb{Z}\})$, a nie jak jest w pracy $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

W sumie stronę formalną rozprawy należy ocenić pozytywnie.

Biorąc pod uwagę zarówno wszystkie powyższe argumenty, jak i te, których tutaj nie wymieniono uważam, ze omawiana praca w pełni spełnia wymogi Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki ($ 13, pkt 1.) i jej nowelizacji z dnia 18 marca 2011 roku (także $ 13, pkt 1.) ”Rozprawa doktorska, przygotowywana pod opieką promotora, powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub artystycznego oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej, a także umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej”.

W związku z tym występuje o dopuszczenie magistra Michała Marcinkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponieważ w przedstawionej rozprawie zostało rozstrzygniete ważne pytanie (hipoteza Draniszknikowa), więc zgłaszam Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki UWr wniosek o wyróżnienie tej pracy.

Poznań 16.08.15 Wacław Marzantowicz