Wrocław, 6 XI 2017 r.

prof. dr hab. Krzysztof Bogdan
Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej
krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Krystiana Bekały
"Rachunek symboliczny oraz splotowe półgrupy miar na grupie Heisenberga"

Rozprawa doktorska mgr. Krystiana Bekały, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Pawła Głowackiego liczy 83 strony, które składają się na 9 rozdziałów i bibliografię. Rozprawa rozwija rachunek symboliczny na grupie Heisenberga

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

z $xy = (x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1))$ jako mnożeniem, i podaje jego zastosowania do badania połgrup splotowych miar probabilistycznych na $\mathbb{H}^n$.

Rozdziały 1-3 rozprawy mają charakter wstępny: prezentują zamysł i główne wyniki rozprawy, a także podstawowe informacje na temat grupy Heisenberga i rachunku operatorów pseudoróżniczkowych. W szczególności omawiają reprezentacje Schroedingera i tzw. kwantyzację, a także rachunek symboliczny Weyla-Hoermandera i własność Wienera dla pewnych klas symboli z wagami m. Autor wyjaśnia tu, że motywacją przeprowadzonych badań jest pytanie, na ile nieprzemienność działania grupowego na grupie Heisenberga wpływa na mechanizm transportu masy w ewolucji markowskiej, przy tym samym funkcjonale generującym co na grupie abelowej. Funkcjonał generujący jest tu tzw. uogólnionym Laplasjanem–dystrybucją spełniającą zasadę dodatniego maksimum–przy czym uogólnione Laplasjany na $\mathbb{H}^n$ są takie same jak uogólnione Laplasjany na $\mathbb{R}^{2n+1}$. W ten sposób funkcjonały generujące splotowe półgrupy miar na $\mathbb{R}^{2n+1}$ mogą być użyte także na grupie Heisenberga i częściowo opisane przy pomocy zwykłej transformacji Fouriera. Badania

półgrup splotowych na grupach Liego zostały zapoczątkowane pracą (numeracja zgodna z bibliografią rozprawy):
[50] G.A. Hunt, Semigroups of measures on Lie groups, Trans. Am. Math. Soc. 81 (1956), 264-293
i obecnie obserwuje się powrót do tej tematyki.

Rozdział 4 podaje regułę Leibnitza dla operatorów splotowych na grupach nilpotentnych stopnia 2 i oparty jest na opublikowanej pracy Autora
[10] K. Bekała, Leibniz's rule on two-step nilpotent Lie groups, Coll. Math. 145 (2016), 137-148.
Ponadto w Rozdziale 4 podana jest częściowa charakteryzacja ograniczonych operatorów splotowych poprzez transformatę grupową.

W Rozdziale 5 Autor wprowadza nowy rachunek symboliczny dla operatorów splotowych na $\mathbb{H}^n$. Jest to rozwinięcie rachunku symbolicznego operatorów pseudoróżniczkowych dla potrzeb kontrolowania "składników wyższego rzędu" generowanych przez działanie grupowe np. w rozwinięciach Taylora w rozdziale 4.2. W tym celu Autor wprowadza funkcje wagowe, np. $g(w,\lambda) = (1 + |w|^2 + \lambda^2)^{1/2}$, gdzie $w \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, oraz tzw. wagi, np. $m(w,\lambda) = 1 + \log(1 + |w|^2 + \lambda^2)$. Następnie definiuje klasy symboli a dla (abelowych) transformat Fouriera dystrybucji temperowanych, przez wymaganie ograniczoności wyrażeń typu

$$\partial_w^\alpha a(w,\lambda) g(w,\lambda)^{|\alpha|}/m(w,\lambda)$$

dla wielowskaźników α o ustalonej długości. Przy użyciu tych narzędzi w Rozdziale 5 Autor częściowo charakteryzuje ograniczone operatory splotowe na grupie Heisenberga oraz szacuje normy ich złożeń (Twierdzenie 5.2.1).

W Rozdziale 6 Kandydat bada odwracalność operatorów splotowych o symbolach w badanych klasach i dowodzi własności Wienera–twierdzenia typu Bealsa (Twierdzenie 6.2.1 i Twierdzenie 6.3.4). Rozdziały 4-6 oceniam jako najważniejszą część rozprawy.

W Rozdziałach 7-9 Autor wykorzystuje rozwinięty rachunek symboliczny dla porównania półgrup splotowych generowanych przez te same izotopowe miary Lévy'ego na grupie Heisenberga $\mathbb{H}^n$ i na odpowiadającej grupie abelowej $\mathbb{R}^{2n+1}$ (Twierdzenie 8.2.2, 8.2.4). Przykłady ilustrujące wyniki to miary Lévy'ego procesow: Gamma-wariance i α-relatywistycznego, gdzie $\alpha \in (0,1]$.

Wyniki Rozdziałów 5-9 oparte są głównie na wynikach preprintu:
[11] K. Bekała, Semigroups of measures and symbolic calculus on the Heisenberg group, http://arxiv.org/pdf/1501.07746.pdf.

Rozprawa doktorska mgr. Krystiana Bekały twórczo rozwija badania z zakresu analizy harmonicznej na grupach nilpotentnych prowadzone we Wrocławiu m.in. przez P. Głowackiego i A. Hulanickiego. Wyniki rozprawy nie budzą zastrzeżeń merytorycznych. Stanowią one rozwiązanie ważnych problemów z analizy harmonicznej na grupie Heisenberga i dają ich dojrzałe opracowanie, włącznie z nietrywialnymi zastosowaniami do porównania splotowych półgrup miar probabilistycznych na $\mathbb{R}^{2n+1}$ i $\mathbb{H}^n$.

Merytoryczna zawartość rozprawy oceniam zatem bardzo wysoko. Podobnie należy ocenić znajomość literatury przedmiotu. Prezentacja wyników jest znakomita, z wyraźną troską o czytelnika. Zauważyłem tylko kilka drobnych usterek: niezgodne stałe we wzorze na półgrupę Gaussa na str. 8, zbyt ograniczające założenia na funkcję typu bump na str. 16, warunek (Hartmana-Wintnera) wystarczający, a nie konieczny na str. 74–podobnie w uwagach przed Wnioskiem 9.1.2.

Wyniki rozprawy zostały już częściowo opublikowane. Obiecująco wyglądają też perspektywy dalszych zastosowań i badań. Interesujące są pytania na ile nieprzemienność grupy ułatwia rozchodzenie się półgrupy na $\mathbb{H}^n$, jeżeli miara Lévy'ego jest zdegenerowana. Chodzi tu o wyjście poza izotropowość, jak w przypadku podlaplasjanu. Pewne badania tego typu przeprowadzono już w pracy

[3] D. Appelbaum, S. Cohen, Lévy processes, pseudo-differential operators and Dirichlet form in the Heisenberg group, Ann. de la Faculté des Sci. de Toulouse 13 (2004), 149-177.

Zagadkowo wygląda też ograniczenie zakresu wykładnika $\alpha/2 \in (0, 1/2]$ dla procesu relatywistycznego–chciałoby się mieć pełen zakres $\alpha/2 \in (0, 1)$. Obecny rozwój teorii splotowych półgrup miar na $\mathbb{R}^d$ może stanowić dodatkową motywację do dalszych badań. Dla przykładu zauważmy, że Autor ogranicza się w rozdziale 9 do uogólnionych Laplasjanów dla tzw. subordynowanych procesów Wienera, tymczasem w świetle obecnych badań T. Grzywnego, P. Sztonyka i ich współautorów, wdzięcznym obiektem do dalszych badań wydaje się klasa miar Lévy'ego z ustalonym odpowiednim profilem radialnym.

Przedłożona rozprawa doktorska ze znacznym naddatkiem spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z zakresu matematyki. Wnoszę o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Wnoszę także o wyróżnienie tej znakomitej rozprawy.

Z wyrazami szacunku,

Krzysztof Bogdan