INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa,
tel.: 48-22-522-81-00, fax: 48-22-629-39-97, e-mail: im@impan.pl, www.impan.pl

Warszawa, 10 sierpnia 2018

Prof. dr hab. Łukasz Stettner
Instytut Matematyczny PAN

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Joanny Tumilewicz pt.
„Problemy wyboru optymalnego czasu zatrzymania –
Kontrakty ubezpieczeniowo-finansowe i opcje amerykańskie"**

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy różnych zastosowań wzorów na pierwsze spadki spektralnie ujemnego procesu Levy'ego względem swojego maksimum poniżej pewnego poziomu, lub pierwsze wzrosty względem minimum powyżej pewnego poziomu. Rozprawa składa się z dwóch części. Pierwsza dotyczy wyceny opcji amerykańskich, gdy ceny akcji są eksponentą od spektralnie ujemnego procesu Levy'ego i przeniesieniem tego na ciąg opcji amerykańskich nazywany opcjami huśtawkowymi, czy amplitudowymi (swing options) i zawiera wyniki z pierwszej wersji pracy [27].
Pokazane wyniki mówią, że optymalny moment zatrzymania w opcji amerykańskiej jest pierwszym wejściem spektralnie ujemnego procesu Levy'ego do przedziału, którego brzegi możemy wyznaczyć jako maksymalizujące pewną funkcję. Uzyskane wyniki przenoszą się potem na przypadek ciągu opcji amerykańskich wspomnianych powyżej.
Część druga rozprawy doktorskiej dotyczy wyceny kontraktu ubezpieczeniowego w którym kupujący płaci w sposób ciągły składki aż do momentu gdy różnica między między logarytmem maksymalnej ceny akcji a logarytmem akcji bieżącej wpadnie powyżej pewnego poziomu, przy założeniu, że logarytm ceny akcji jest spektralnie ujemnym procesem Levy'ego. W rozdziale drugim badana jest sytuacja gdy wypłata w chwili końcowej jest stała. Podana jest cena kontraktu i uczciwych składek nie zapewniających zysku żadnej ze stron kontraktu. Ten kontrakt jest następnie uogólniany na przypadek możliwości likwidacji kontraktu przez kupującego. Kolejne uogólnienie dotyczy wprowadzenia ograniczenia dodatkowego na spadek logarytmu cen akcji poniżej pewnego otoczenia minimum logarytmu cen akcji. Wtedy we wzorze na cenę instrumentu ubezpieczeniowego pojawia się dodatkowy moment zatrzymania. Korzystając z teorii fluktuacji spektralnie ujemnych procesów Levy'ego jest wyznaczona cena tego instrumentu. Idąc dalej wprowadza się możliwość zatrzymania kontraktu, a więc kolejnego problemu optymalnego zatrzymywania. W rozdziale trzecim pracy badany jest ten sam model co w rozdziale drugim z ta modyfikacją, że wypłata w chwili końcowej zależy od różnicy między maksimum logarytmu ceny akcji a logarytmem w chwili końcowej ceny akcji. Prowadzi

to do bardziej finezyjnych rozważań, ale badane są w pracy te same uogólnienia co w rozdziale drugim.

Dodatkową wartością pracy są rysunki będące wynikiem obliczeń numerycznych.

Wyniki pracy są ciekawe i warte uwagi. Niestety praca jest spisana trochę niechlujnie, pojawiają się w niej nieścisłości (na szczęście w odczuciu recenzenta wszystkie do pokonania).

Poniżej wytykam przykłady kilku pojawiających się „niedoróbek".

Zastanawiający jest Lemat pomocniczy 0.0.1, który w odczuciu recenzenta jest niedopracowany. Przede wszystkim wymaga się w nim by filtracja naturalna była prawostronnie ciągła co jest mocnym założeniem. Dla przykładu nie musi tak być dla procesów ciągłych (patrz. Przykład w problemie 7.1 w rozdziale 2.7 książki I. Karatzasa i S. Schreve „Brownian motion and Stochastic calculus"). Prawostronna ciągłość naturalnej filtracji może być ważna gdy mówimy o czasie pierwszego dojścia procesu do zbioru otwartego, w przypadku zbiorów domkniętych (przedziałów domkniętych nie ma potrzeby takiego założenia). Nie wiadomo po co w Lemacie 0.0.1 pojawia się czas zabijania $\tau_0$ nigdzie dalej nie wykorzystywany w lemacie, poza faktem, że istnieje granica $\lim_{t\to \infty} e^{-rt}V(\Upsilon_t)$. Kolejny problem z tym lematem to założenie ciche, że filtracja naturalna nie zależy od punktu startu procesu (?). Rozpatrywany czas zatrzymania $\tau^*$ może zależeć od filtracji. Chyba, że ograniczymy się do momentów pierwszego wejścia do zbioru domkniętego (a tak jest rzeczywiście w praktyce w rozdziałach 1, 2 i 3). Wreszcie kolejna luka dotyczy braku jednostajnej ergodyczności rodziny $e^{-r\tau}v^*(\Upsilon_\tau)$, gdy $\tau$ jest momentem zatrzymania, co jest potrzebne by mieć tw. Doob'a. Wystarczy tutaj założyć dodatkowo, że $V$ jest nieujemne.

Problemy sterowania optymalnego opisywane w pierwszym rozdziale pracy opierają się na stwierdzeniu, że optymalne zatrzymywanie jest pierwszym momentem wpadnięcia do przedziału. Jest to nietrywialny wynik, który niestety jest tylko szkicowany w rozważaniach przed Lematem 1.3.2 i przedstawiony szkic jest zdecydowanie niepełny. Ważna tutaj jest wypukłość funkcji wartości optymalnego stopowania. Sprowadza się to do pokazania, że odpowiednia półgrupa prawdopodobieństwa przejścia przeprowadza funkcje wypukłe w wypukłe. Jest to dość specjalna własność, która rzeczywiście zachodzi dla procesu log Levy'ego gdy proces stanu (cena akcji) zależy liniowo od warunki początkowych. W ogólności nie jest to prawda jak można zauważyć w pracy Bergmana, Grundy i Wiener z J. Finance z 1996 roku. Kolejny fakt z którego cicho korzystamy to postać optymalnego momentu zatrzymania i jego istnienie, co wynika z faktu, że wspomniany proces cen jest quasi lewostronnie ciągły bo spełnia warunek Fellera (patrz książka Dynkina). Należałoby teraz pokazać, że zbiór optymalnego zatrzymywania jest przedziałem a nie np. sumą przedziałów. Jest to dopiero pokazane w poprawionej wersji pracy [27].

Z chwilą gdy już wiemy co napisałem powyżej to rzeczywiście możemy posiłkować się formułami dotyczącymi fluktuacji spektralnie ujemnych procesów Levy'ego. W przypadku opcji swing pojawiają się dwie nieścisłości: najpierw trzeba dodać, że $\delta_i$ tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych (inaczej formuła (1.18) nie ma sensu), a potem należałoby pokazać, że dla dowolnej strategii zatrzymania $(\tau_1,\ldots,\tau_N)$, gdzie $\tau_{i+1}\geq \tau_i+\delta_i$ wartość funkcjonału jest nie większa od wartości gdy stosujemy momenty optymalne wynikające w równań Bellmana (1.17)-(1.19). Chodzi tutaj o to, że dowolne momenty zatrzymania nie muszą być postaci

$\tau_{i+1}=\tau_i + \delta_i + \sigma \cdot \theta_{\tau_i+\delta_i}$, gdzie $\theta$ jest operatorem przesunięć Markowa. Mogą to być jakieś momenty zależne od przeszłości.
Tym niemniej sformułowany wynik jest prawdziwy, chociaż przedstawiony dowód jest niepełny.
W późniejszej części doktoratu pojawia się filtracja $F_t$, która praktycznie nie jest zdefiniowana. Z rozdziału pierwszego można się domyślać, że chodzi tu o prawostronnie ciągłą uzupełnioną naturalną filtrację. Ponadto korzysta się intensywnie z faktu, że proces D jest silnym procesem Markowa co powinno być sformułowane we wstępie.

Reasumując, autorka pracy doktorskiej sprawnie opanowała aparat fluktuacji spektralnie ujemnych procesów Levy'ego, który to wykorzystywała sukcesywnie w pracy. Pojawiły się w pracy pewne nieścisłości wypunktowane powyżej, ale przedstawione wyniki są prawdziwe, chociaż ich dowody są czasami niepełne. Recenzentowi wydaje się, że potrafiłby uzupełnić te luki.
Przedstawione w doktoracie wyniki są oryginalne i opublikowane lub zgłoszone do publikacji.
Dlatego też uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie doktorantki do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Łukasz Stettner

Warszawa, 10 sierpnia, 2018