dr hab. Maciej Bocheński, prof. UWM
Instytut Matematyki, WMiI,
Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn,
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
e-mail: mabo@matman.uwm.edu.pl

Olsztyn, 29.11.2025

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Aleksandra Antasika

Rozprawa doktorska mgr. Aleksandra Antasika,

"Rational approximation of surface group representations",

dotyczy - jak sama nazwa wskazuje - wymiernych przybliżeń grup powierzchni. W szczególności, niech Σ_g oznacza orientowalną, zamkniętą powierzchnię rodzaju $g \geq 2$. Poprzez utożsamienie $\Sigma_g \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$ (gdzie $\mathbb{H}^2$ oznacza płaszczyznę hiperboliczną, $\Gamma := \pi_1(\Sigma_g)$) otrzymujemy $j : \Gamma \to PSL(2,\mathbb{R})$ - dyskretną, wierną reprezentację Γ w $PSL(2,\mathbb{R})$. Oznaczmy też przez $\tau : PSL(2,\mathbb{R}) \to PSL(n,\mathbb{R})$ nieprzewiedlną reprezentację (jedyna z dokładnością do sprzężenia). Reprezentację $\rho : \Gamma \to PSL(n,\mathbb{R})$ nazywamy *reprezentacją Hitchina* jeśli można ją otrzymać z $\tau \circ j$ poprzez ciągłą deformację. Pytanie jakie stawia autor to:

czy każdą reprezentację Hitchina można przybliżyć reprezentacją wymierną (czyli reprezentacją w $PSL(n,\mathbb{Q})$)?

Pytanie to jest ciekawe i bazuje na klasycznym wyniku Takeuchi - każdą reprezentację $j : \Gamma \to PSL(2,\mathbb{R})$ można przybliżyć reprezentacją wymierną. Co więcej, tematyka pracy nawiązuje do cieszących się dużym zainteresowaniem obszarów badawczych takich jak teoria reprezentacji grup dyskretnych do grup Liego (np. reprezentacje Anosova).

Głównym wynikiem rozprawy (*twierdzeniem głównym*) jest twierdząca odpowiedź na powyższe pytanie.

Rozprawa doktorska składa się z pięciu rozdziałów oraz jednego załącznika:

1. Podstawowe definicje oraz własności: macierze SSM, krzywe na powierzchni Σ_g.
2. Opis przestrzeni Teichmüllera, komponenty Hitchina, brzegu Gromova.
3. Dowód głównego twierdzenia za popmocą metody będącej - w pewnym sensie - uogólnieniem metody Takeuchiego. Autor bierze dowolną reprezentację Hitchina i znajduje jej wymierne przybliżenie poprzez konstrukcję odpowiednich macierzy.
4. Jest opisem (nieudanej) próby udowodnienia głównego twierdzenia za pomocą tzw. *Goldman twists*. Autorowi udaje się jednak udowodnić tą metodą główne twierdzenie w przypadku $n = 2$, tj. dla włożenia j. Należy podkreślić, że przy użyciu podobnej metody, Audibert

i Zshornack ([AZ23]) udowodnili wcześniej główne twierdzenie dla dowolnych $n \geq 2$ oraz $g \geq 3$.

5. Dla $n = 3$ Autor rozpatruje konkretną rodzinę (krzywą) włożeń $\rho_t : \pi_1(\Sigma_2) \to SL(3, \mathbb{R})$. Następnie pokazuje, że pewne otoczenie tej krzywej składaja się z włożeń, które można przybliżyć reprezentacją wymierną. Dowód wspomagany jest obliczeniami przeprowadzonymi w programie FriCAS (kod załączony jest w dodatku A).

Muszę zaznaczyć, że w mojej ocenie rozprawa jest napisana dość niestarannie, co wpływa negatywnie na jej ogólny odbiór. Dla przykładu, w rozdziale 1.1 napotykamy między innymi na następujące nieścisłości i literówki:

- Wydaje się, że w Definicji 1.1.1 warto założyć, że wartości własne są rzeczywiste.
- Symbol χ_A nie jest zdefiniowany.
- Nie jest jasne, co oznacza zapis
$$\frac{\partial f}{\partial t}(\lambda_i)|_{t=0, X=M}.$$
- Funkcja
$$g_i(X) := X - \lambda_i(X)$$
jest źle zdefiniowana.
- Nie jest jasne, co oznacza zapis
$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & (l_1 l_2)^{-1} \end{bmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$
dla macierzy $P \in GL(n, \mathbb{R})$.

Ponadto Autor w sowich dowodach często powołuje się na źródła, bez cytowania konkretnych wyników. To nie tylko utrudnia czytanie rozprawy, ale przede wszystkim upodabnia ją to artykułu naukowego. Mam ogólne wrażenie, że rozprawa przygotowana została pospiesznie i niedbale.

Pewnym problemem pozostaje też fakt, że główne twierdzenie nie jest wynikiem nowym a dowód twierdzenia głównego nie został opublikowany w artykule naukowym. Zgodnie z załączonymi do rozprawy doktorskiej dokumentami, jedyną publikacją Autora jest artykuł z 2022 *Sampling C^1-submanifolds of $\mathbb{H}^n$* opublikowany w Colloquium Mathematicum.

Pomimo powyższych uwag uważam, że rozprawa doktorska mgr. Aleksandra Antasika pokazuje szeroką wiedzę Autora i umiejętność prowadzenia badań w zakresie takich działów matematyki jak topologia algebraiczna, geometria różniczkowa czy teoria grup Liego. W dowodach o dużej złożoności Autor biegle rozwiązuje problemy techniczne i istotnie korzysta ze względnie nowych wyników (jak np. Lemat 2.3.1). Dodatkowym atutem jest umiejętność wykorzystania metod komputerowych w dowodach twierdzeń. Należy podkreślić, że w rozdziale 3. rozprawy Autor przedstawia pełne, oryginalne rozwiązanie problemu badawczego.

Konkluzja. W mojej opinii, praca doktorska mgr. Aleksandra Antasika spełnia wymagania zwyczajowe, jak i wymagania formalne z ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" w tym te wymienione w artykule 187. wspomnianej ustawy. Z tego powodu wnioskuję o dopuszczenie mgr. Aleksandra Antasika do kolejnych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

M. Bocheński
....
Maciej Bocheński