

prof. dr hab. Piotr Zakrzewski
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, 7.07.2026 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Tomasza Żuchowskiego:

„O ciągach miar i ideałach w algebrach Boole’a”

Zasadnicza część rozprawy – rozdziały 3, 4 i 5 – jest poprzedzona dwiema częściami, składającymi się na bardzo obszerny wstęp. Rozdział 1 ma charakter autoreferatu, streszczającego wyniki rozprawy, rozdział 2 wprowadza oznaczenia oraz ustala definicje rozważanych w kolejnych rozdziałach pojęć oraz przypomina podstawowe twierdzenia, które ich dotyczą. Swoją krytyczną ocenę takiego układu treści przedstawię pod koniec recenzji.

Główną częścią rozprawy, odpowiadającą jej tytułowi i stanowiącą spójną całość, są rozdziały 3 i 4.

Wyniki rozdziału 3 pochodzą z samodzielnej pracy mgr. Żuchowskiego (*The Nikodym property and filters on ω* , Arch. Math. Logic 64 (2025), no. 5–6). Punktem wyjścia jest wprowadzona przez W. Schachermayera definicja własności Nikodyma, która przysługuje algebrze Boole’a $\mathcal{A}$, jeśli dla każdego ciągu skończenie addytywnych miar znakowanych na $\mathcal{A}$ jego punktowa ograniczoność implikuje ograniczoność ciągu norm tych miar. Definicja ta była motywowana znanym twierdzeniem Ottona Nikodyma, które w szczególności stwierdza, że każda σ -zupełna algebra Boole’a ma własność Nikodyma. Algebry z tą własnością były i są przedmiotem intensywnych badań, w które angażowali się znani matematycy (m.in. R. Haydon, W. Schachermayer, M. Talagrand i P. Koszmider).

Problemem naukowym, którego rozwiązaniu poświęcona jest ta część rozprawy, jest zbadanie w kontekście własności Nikodyma przestrzeni topologicznych postaci N_F , gdzie F jest filtrem niegłównym na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, a N_F składa się z liczb naturalnych jako punktów izolowanych oraz punktu p_F spoza $\mathbb{N}$, którego bazowe otoczenia otwarte są postaci $A \cup \{p_F\}$ dla $A \in F$. Dokładniej, przyczyna faktu, że przeliczalna algebra Boole’a nie ma własności Nikodyma, leży w tym, że jej przestrzeń Stone’a zawiera nietrywialny ciąg zbieżny (czyli homeomorficzną kopię przestrzeni N_{Fr} , gdzie Fr jest filtrem zbiorów koskończonych w $\mathbb{N}$). Chodzi więc o zbadanie, dla jakich filtrów F zawieranie przez przestrzeń Stone’a $St(\mathcal{A})$ algebry $\mathcal{A}$ kopii przestrzeni N_F implikuje, że algebra $\mathcal{A}$ nie ma własności Nikodyma.

Przestrzenie postaci N_F pojawiają się w literaturze w wielu kontekstach, w szczególności odgrywają istotną rolę w teorii przestrzeni postaci $C_p(X)$. Badanie związków pomiędzy własnościami przestrzeni N_F a własnościami

determinujących je filtrów F stanowiło temat niedawnej pracy Witolda Marciszewskiego i Damiany Soboty (Arch. Math. Logic 63 (2024), pozycja [76] bibliografii rozprawy). W szczególności przypomniano w niej, że N_F zawiera nietrywialny ciąg zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy F jest równoważny w sensie Katětova filtrowi Fr .

Motywowany przypadkiem ideału Fin zbiorów skończonych w $\mathbb{N}$ (zob. Example 3.1.5) Żuchowski rozważa klasę ideałów anty-Nikodyma $\mathcal{AN}$, złożoną z tych ideałów $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$, że dla filtru $F = \mathcal{I}^*$, dualnego do $\mathcal{I}$ (złożonego z dopełnień jego elementów), na przestrzeni N_F mamy ciąg $\langle \mu_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ znakowanych miar o skończonych nośnikach taki, że $\|\mu_n\| \rightarrow \infty$ i $\mu_n(A) \rightarrow 0$ dla każdego otwarto-domkniętego podzbioru A przestrzeni N_F . W szczególności, fakt, że $\mathcal{I}$ należy do klasy $\mathcal{AN}$ okazuje się być (Corollary 4.2.2) warunkiem wystarczającym do tego, by zawieranie przez przestrzeń Stone’a $St(\mathcal{A})$ algebry $\mathcal{A}$ kopii przestrzeni N_F implikowało, że algebra $\mathcal{A}$ nie ma własności Nikodyma.

Autor znajduje kilka ciekawych, eleganckich i nietrywialnych charakterystyk ideałów anty-Nikodyma, inspirowanych charakterystykami uzyskanymi wcześniej przez Marciszewskiego i Sobotę, wprowadzonej przez nich klasy $\mathcal{BJNP}$ tych ideałów, dla których na przestrzeni N_F istnieje tzw. ograniczony ciąg miar Josefsona–Nissenzweiga (co w szczególności implikuje, że jeśli przestrzeń Stone’a $St(\mathcal{A})$ algebry $\mathcal{A}$ zawiera kopię przestrzeni N_F , to nie ma własności Grothendiecka). Najpierw (Theorem 3.2.1) robi to w terminach ciągów miar na N_F , gdzie $F = \mathcal{I}^*$: $\mathcal{I}$ jest anty-Nikodyma wtedy i tylko wtedy, gdy na N_F istnieje ciąg miar o warunkach prostszych od tych w definicji klasy $\mathcal{AN}$. Następnie tę charakterystykę wykorzystuje do pokazania (Theorem 3.2.2), że ideał $\mathcal{I}$ jest anty-Nikodyma wtedy i tylko wtedy, gdy rozszerza się do ideałów postaci $\text{Exh}(\varphi) = \{A \subseteq \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A \setminus [0, n]) = 0\}$ dla pewnych podmiar φ na $\mathbb{N}$. Na mocy wcześniejszego wyniku Filipowa i Szucy wynika stąd, że klasa $\mathcal{AN}$ składa się dokładnie z tzw. ideałów sumowalnych oraz ideałów w nich zawartych (Corollary 3.2.7; równoważnie: ideałów, które się do ideałów sumowalnych redukują w sensie Katětova, Theorem 3.3.2). Jako wniosek Żuchowski pokazuje też (Corollary 3.2.5), że dla każdego ideału anty-Nikodyma istnieje redukcja w sensie Katětova do znanego ideału $\mathcal{Z}$ zbiorów o asymptotycznej gęstości 0. Wcześniej Marciszewski i Sobota pokazali (zob. [76, Theorem C]), że istnienie takiej redukcji charakteryzuje klasę $\mathcal{BJNP}$, skąd płynie natychmiastowy wniosek, że $\mathcal{AN} \subseteq \mathcal{BJNP}$.

Jako prosty wniosek z wcześniejszych twierdzeń oraz faktów z literatury, autor pokazuje (Theorem 3.3.3) równoważność własności anty-Nikodyma tzw. ideałów gęstości, których najbardziej znanym przykładem jest ideał $\mathcal{Z}$, z licznymi innymi własnościami ideałów, np. z należeniem do dopełnienia podklasy ideałów gęstości, złożonej z ideałów izomorficznych z ideałami Erdősa–Ulama. Ponadto ideał gęstości jest anty-Nikodyma wtedy i tylko wtedy, gdy jest ostro poniżej w sensie Katětova ideału $\mathcal{Z}$. Okazuje się też (Theorem 3.3.13), że w klasie $\mathcal{AN}$ w ogóle nie ma ideału maksymalnego w sensie Katětova (w przeciwieństwie do klasy $\mathcal{BJNP}$, której elementem maksymalnym jest ideał $\mathcal{Z}$). Jest natomiast w tej klasie (Corollary 3.3.10) rodzina $\leq_K$ -dominująca mocy $\mathfrak{d}$ (złożona z ideałów gęstości).

Wyniki rozdziału 3 uważam za ciekawe, a ich dowody wymagają dużej sprawności technicznej w operowaniu ciągami miar.

Rozdział 4, najobszerniejszy w rozprawie, oparty jest na wspólnym z Damianem Sobotą, pełniącym funkcję promotora, nieopublikowanym artykule (*The Nikodym and Grothendieck properties of Boolean algebras and rings related to ideals*, arXiv:2510.19744). W tym rozdziale kluczową rolę, obok własności Nikodyma, odgrywa mająca swoją genezę w teorii przestrzeni Banacha własność Grothendiecka, która przysługuje algebrze Boole’a $\mathcal{A}$, jeśli dla każdego ciągu skończenie addytywnych miar znakowanych na $\mathcal{A}$ jego słaba z gwiazdką zbieżność do 0 w przestrzeni Banacha miar na $\mathcal{A}$ (równoważna z punktową zbieżnością tego ciągu miar do 0 w połączeniu z ograniczonością ciągu ich norm) implikuje, że ciąg ten jest słabo zbieżny do 0 (co jest równoważne punktowej zbieżności do 0 ciągu przedłużeń tych miar do σ -addytywnych miar borelowskich na przestrzeni Stone’a S_F algebry $\mathcal{A}_F$). Zależności pomiędzy własnością Nikodyma i własnością Grothendiecka są przedmiotem intensywnych badań. W szczególności, wiele algebr ma je obie, znane są przykłady algebr z własnością Nikodyma, ale bez własności Grothendiecka, natomiast przykłady algebr z własnością Grothendiecka i bez własności Nikodyma znaleziono dotąd jedynie z pomocą dodatkowych aksjomatów teorii mnogości (Pierwszy taki przykład podał Talagrand zakładając prawdziwość hipotezy continuum).

Głównym zadaniem badawczym tej części rozprawy jest zbadanie w kontekście własności Nikodyma i Grothendiecka ciał zbiorów postaci $\mathcal{A}_F = F \cup F^*$, gdzie F jest filtrem niegłównym na $\mathbb{N}$, a F^* – ideałem dualnym do F , złożonym z dopełnień jego elementów. Autorzy znajdują następującą ciekawą i nietrywialną charakteryzację własności Nikodyma takich algebr (Theorem 4.4.7): $\mathcal{A}_F$ ma własność Nikodyma wtedy i tylko wtedy, gdy ma ją algebra ilorazowa $\mathcal{A}_F/Fin$ oraz F^* nie jest ideałem anty-Nikodyma. O ile dowód konieczności tych warunków jest łatwy (własność Nikodyma przenosi się na algebry ilorazowe, a przestrzeń S_F zawiera homeomorficzną kopię przestrzeni N_F złożoną z ultrafiltrów głównych w algebrze $\mathcal{A}_F$ oraz filtru F , który w tej algebrze jest ultrafiltrem niegłównym), to dowód ich dostateczności wymagał złożonej analizy różnych ciągów miar, w szczególności pokazania po drodze (Theorem 4.3.15) pożytecznej charakteryzacji własności Nikodyma algebry $\mathcal{A}_F$ w języku własności ciągów nieujemnych σ -addytywnych miar na przestrzeni S_F oraz istotnego wykorzystania wyników z rozdziału 3, odnoszących się do klasy $\mathcal{AN}$.

W istocie charakteryzacja z twierdzenia 4.3.15 dotyczy klasy algebr postaci $\mathcal{A}\langle\mathcal{I}\rangle$, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem w algebrze Boole’a $\mathcal{A}$, a $\mathcal{A}\langle\mathcal{I}\rangle$ to podalgebra algebry $\mathcal{A}$ generowana przez $\mathcal{I}$ (przy tych oznaczeniach $\mathcal{A}_F = \mathcal{P}(\mathbb{N})\langle F^*\rangle$).

Pokłósiem starannej analizy ciągów miar, które świadczą o tym, że algebra $\mathcal{A}\langle\mathcal{I}\rangle$ nie ma własności Nikodyma (tzw. ciągów anty-Nikodyma), jest stwierdzenie (Proposition 4.3.12) mówiące, że, gdy dodatkowo spełniony jest warunek, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ algebra relatywna $\mathcal{A}_A$ ma własność Nikodyma, algebra $\mathcal{A}\langle\mathcal{I}\rangle$ nie ma również własności Grothendiecka.

Dotyczy to w szczególności algebr $\mathcal{A}_F$: jeśli $\mathcal{A}_F$ nie ma własności Nikodyma, to nie ma również własności Grothendiecka (dodatkowy warunek z

założeń stwierdzenia 4.3.12 jest dla tych algebr zawsze spełniony). W tym przypadku istotą rzeczy jest pokazanie, że dla każdego ciągu anty-Nikodyma ultrafiltr F w algebrze $\mathcal{A}_F$ odgrywa szczególną rolę: jest jedynym tzw. punktem koncentracji Nikodyma (*Nikodym concentration point*) tego ciągu (Proposition 4.3.12 i Example 4.4.24). Pojęcie to pochodzi z jednej z wcześniejszych prac Soboty. Autorzy definiują jego wzmocnienie – tzw. silny punkt koncentracji Nikodyma (*strong Nikodym concentration point*) danego ciągu anty-Nikodyma miar na dowolnej algebrze Boole’a $\mathcal{A}$ – jako ultrafiltr w $\mathcal{A}$ o pewnych szczególnych własnościach. Następnie pokazują (Theorem 4.1.20), że jego istnienie gwarantuje, że algebra $\mathcal{A}$ nie ma również własności Grothendiecka. Co więcej, jeśli ciąg anty-Nikodyma ma dokładnie jeden punkt koncentracji Nikodyma, to jest on także silnym punktem koncentracji Nikodyma tego ciągu (Lemma 4.1.13) i taka sytuacja ma właśnie miejsce w przypadku algebry $\mathcal{A}_F$, gdy nie ma ona własności Nikodyma (i w konsekwencji nie ma też własności Grothendiecka).

Przytoczoną wyżej charakteryzację własności Nikodyma algebr $\mathcal{A}_F$ z twierdzenia 4.4.7 Autorzy wykorzystują do pokazania, że w przypadku, gdy F jest P -filtrem, $\mathcal{A}_F$ ma własność Nikodyma wtedy i tylko wtedy, gdy F^* nie jest ideałem anty-Nikodyma (Theorem 4.4.15), co w sytuacji, gdy dodatkowo F^* jest ideałem gęstości, na mocy wyników z rozdziału 3 ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy F^* jest izomorficzny z pewnym ideałem Erdősa-Ulama (Theorem 4.4.20). To prowadzi do nowego przykładu klasy algebr z własnością Nikodyma, ale bez własności Grothendiecka. Mianowicie, jeśli F jest filtrem dualnym do ideału Erdősa-Ulama, to algebra $\mathcal{A}_F$ ma własność Nikodyma, ale nie ma własności Grothendiecka na mocy wcześniejszych wyników Marciszewskiego i Soboty. Z pomocą skonstruowanej przez A. Kwełę rodziny mocy $\mathfrak{c}$ parami nieizomorficznych ideałów Erdősa-Ulama Autorzy uzyskują (Theorem 4.4.26) rodzinę mocy $\mathfrak{c}$ parami nieizomorficznych algebr postaci $\mathcal{A}_F$, z których każda ma własność Nikodyma, ale nie ma własności Grothendiecka, a dodatkowo filtr F jest klasy borelowskiej $\mathbb{F}_{\sigma\delta}$.

Porzucając ograniczenia na definiowalność filtru, Autorzy uzyskują inną klasę przykładów algebr postaci $\mathcal{A}_F$ z własnością Nikodyma, ale bez własności Grothendiecka, biorąc za F filtry postaci $\mathcal{U} \oplus \mathcal{Z}^*$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. Brak własności Grothendiecka algebry $\mathcal{A}_F$ ponownie gwarantują wyniki Marciszewskiego i Soboty, natomiast jej własność Nikodyma bierze się stąd, że własność Nikodyma algebr $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ i $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}^*}$ przenosi się na algebrę $\mathcal{A}_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{Z}^*}$, co jest nietrywialnym wynikiem (Theorem 4.4.29), którego dowód wykorzystuje charakteryzację własności Nikodyma z twierdzenia 4.3.15. Z pomocą $2^{\mathfrak{c}}$ parami nieizomorficznych ultrafiltrów Autorzy uzyskują (Theorem 4.4.30) rodzinę mocy $2^{\mathfrak{c}}$ parami nieizomorficznych algebr postaci $\mathcal{A}_F$, z których każda ma własność Nikodyma, ale nie ma własności Grothendiecka.

W powyższym opisie zawartości rozdziału 4 skoncentrowałem się jedynie na najważniejszych, moim zdaniem, wynikach. Rozdział ten zawiera jeszcze szereg innych ciekawych rezultatów i w moim odczuciu stanowi najsilniejszą część rozprawy.

Rozdział 5 jest wyraźnie z boku głównego nurtu rozprawy i poświęcony

jest badaniom pewnych współczynników kardynalnych związanych z funkcjami z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ bez punktów stałych. Z miarami na algebrach Boole'a łączy go tylko motywacja: funkcje bez punktów stałych odpowiadają macierzom Rosenthala, złożonym z zer i jedynek, a macierze Rosenthala są z kolei związane z klasycznym lematem Rosenthala, odnoszącym się do ciągów miar na algebrach Boole'a. Niemniej jednak ani sformułowane przez Autora definicje rozważanych współczynników, ani związane z nimi rozumowania nie mają już z miarami nic wspólnego i należą po prostu do ważnego nurtu kombinatorycznej teorii mnogości. Nurt ten koncentruje się na porównywaniu współczynników, wprowadzonych z pomocą różnych definicji kombinatorycznych, zarówno pomiędzy sobą, jak i z innymi klasycznymi, znanymi wcześniej współczynnikami, pełniącymi rolę punktów odniesienia.

Wyniki rozdziału 5 pochodzą ze wspólnego z Arturo Martínezem-Celisem, pełniącym funkcję promotora pomocniczego, artykułu (*On cardinal invariants related to Rosenthal families and large scale topology*, Ann. Pure Appl. Logic 176 (2025), no. 8). Wprowadzone tam zostają dwa schematy współczynników, indeksowane własnością φ mogącą przysługiwać rodzinie funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ bez punktów stałych:

- $\mathbf{ros}_\varphi$ – najmniejsza moc rodziny nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ takiej, że dla dowolnej funkcji f o własności φ znajdzie się w tej rodzinie zbiór A , którego przecięcie z obrazem $f[A]$ jest skończone,
- Δ_φ – najmniejsza moc takiej rodziny funkcji f o własności φ , że dla dowolnego nieskończonego podzbioru A zbioru $\mathbb{N}$ znajdzie się w tej rodzinie funkcja f , dla której przecięcie A z obrazem $f[A]$ jest nieskończone.

P. Koszmider i A. Martínez-Celis pokazali wcześniej, że $\mathbf{ros}_1 = \mathfrak{r}$ ($\mathbf{ros}_1$ odnosi się do rodziny wszystkich funkcji bez punktów stałych) oraz $\mathbf{ros}_{\text{Fin}-1} = \min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\}$.

Główne wyniki w ZFC rozdziału 5 to następujące twierdzenia (nie przytaczam definicji dobrze znanych współczynników, stanowiących powszechnie przyjęty punkt odniesienia przy badaniu współczynników nowo wprowadzonych).

- Theorem 5.2.10: $\Delta_{\text{Fin}-1} = \max\{\mathfrak{b}, \Delta_1\}$.
- Theorem 5.3.3: $\Delta_{1-1} = \Delta_{\text{involution}}$ i $\mathbf{ros}_{1-1} = \mathbf{ros}_{\text{involution}}$.
- Theorem 5.3.5: $\max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}, \text{cov}(\mathcal{N})\} \leq \Delta_{1-1} \leq \text{non}(\mathcal{M})$ oraz $\min\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}, \text{non}(\mathcal{N})\} \geq \mathbf{ros}_{1-1} \geq \text{cov}(\mathcal{M})$.
- Theorem 5.4.3: $\Delta_{1-1} \geq \mathfrak{e}_g$ i $\mathbf{ros}_{1-1} \leq \widehat{\mathfrak{e}}_g$ dla każdej rosnącej funkcji $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bez punktów stałych, gdzie:

$$\mathfrak{e}_g = \min \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \prod_{n \in \omega} g(n) \text{ i } \forall h \in \prod_{n \in \omega} g(n) \exists f \in \mathcal{F} (f =^\infty h)\}.$$

$$\widehat{\mathfrak{e}}_g = \min \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \prod_{n \in \omega} g(n) \text{ i } \forall h \in \prod_{n \in \omega} g(n) \exists f \in \mathcal{F} |f \cap h| < \aleph_0\}.$$

- Theorem 5.4.9: $\Delta_{1-1} \geq \text{cov}^*(\mathcal{I})$ oraz $\mathbf{ros}_{1-1} \leq \text{non}^*(\mathcal{I})$, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem postaci

$$\mathcal{ED}_{\bar{\mu}} = \{A \subseteq \omega : \exists k \in \omega \forall n \in \omega (\mu_n(J_n \cap A) \leq k)\}$$

dla pewnego podziału zbioru $\mathbb{N}$ na przedziały J_n , $n \in \mathbb{N}$, z miarami μ_n na J_n spełniającymi pewne warunki, natomiast

$$\text{cov}^*(\mathcal{I}) = \min \{|\mathcal{A}|: \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ i } \forall X \in [\omega]^\omega \exists A \in \mathcal{A} (|A \cap X| = \aleph_0)\},$$

$$\text{non}^*(\mathcal{I}) = \min \{|\mathcal{X}|: \mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega \text{ i } \forall A \in \mathcal{I} \exists X \in \mathcal{X} (|A \cap X| < \aleph_0)\}.$$

Rozdział 5 zamykają dowody niesprzeczności z ZFC następujących zdań:

- Theorem 5.5.4: $\text{ros}_{1-1} < \min\{\text{dom}, \mathfrak{r}, \text{non}(\mathcal{N})\}$,
- Theorem 5.5.5: $\Delta_{1-1} > \max\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}, \text{cov}(\mathcal{N})\}$,
- Theorem 5.5.8: $\Delta_{1-1} > \text{cov}^*(\mathcal{ED}_{\text{Fin}})$ i $\text{ros}_{1-1} < \text{non}^*(\mathcal{ED}_{\text{Fin}})$.

Rozdział 5 ma 10 stron (oprócz pierwszej ze wstępem i ostatniej z listą problemów otwartych), na których Autorzy zmieścili 6 definicji, 8 stwierdzeń z dowodami i 8 twierdzeń (przytoczonych powyżej) z dowodami. Już to zestawienie sugeruje pewną słabość tej części rozprawy, którą jej lektura potwierdza: brakuje znaczących twierdzeń, uzyskanych w drodze dłuższych i trudniejszych rozumowań. Jednocześnie chcę podkreślić, że dowody pięciu pierwszych twierdzeń z powyższej listy, z którymi zapoznałem się szczegółowo, są eleganckie i pomysłowe.

Podsumowując, biorąc pod uwagę zawartość rozdziału 3, a zwłaszcza rozdziału 4, zawartość merytoryczną rozprawy oceniam wysoko.

Do strony redakcyjnej rozprawy mam pewne uwagi krytyczne.

Z jednej strony jest ona napisana bardzo starannie, poprawną angielszczyzną, dowody są kompletne (znalazłem jeden, drobny i dający się łatwo naprawić, błąd merytoryczny, przeniesiony do rozdziału 5 z jego oryginalnej, opublikowanej wersji: w uzasadnieniu Corollary 5.3.4 sposób modyfikacji funkcji $\hat{f}$ jest chybiony). Liczba dostrzeżonych przeze mnie literówek, potknięć redakcyjnych bądź językowych też jest niewielka. Oto krótka lista najistotniejszych:

- na str.2 twierdzenie 3.3.3 jest zacytowane błędnie: ideał gęstości jest w klasie $\mathcal{AN}$ wtedy i tylko wtedy, gdy *nie* jest izomorficzny z ideałem Erdősa-Ulana,
- nie zostało doprecyzowane, co będziemy w tej pracy rozumieć przez nietrywialny ciąg zbieżny, a od tego zależy formalna prawdziwość pierwszej równości w przykładach 2.5.5 i 2.5.9,
- definicja 2.6.14 izomorfizmu ideałów powinna była zostać wprowadzona przed zdefiniowaniem rozłącznej sumy ideałów (na str. 19),
- w trzeciej linijce dowodu lematu 3.1.9 zamiast N_F powinno być X ,
- wydaje mi się, że powoływanie się na twierdzenie Severa (w uwadze 4.4.1 i pod koniec dowodu twierdzenia 4.4.15) dla pokazania, że algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})/Fin$ ma własność Nikodyma, jest nadmiarowe: algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest zupełna, a Schachermayer pokazał, że własność Nikodyma dziedziczy się na algebry ilorazowe,
- na początku dowodu twierdzenia 4.2.1 pojawia się funkcja f , która w dalszej jego części jest oznaczana literą h .

Z drugiej jednak strony, pomyśl, żeby w rozprawie tak obszernej objętościowo (łącznie z bibliografią i skorowidzem ma 109 stron), wręcz przytłaczającej czytelnika liczbą rozważanych pojęć i wprowadzanych oznaczeń, wyjaśnienia większości tych oznaczeń zebrać w rozdziale 2 i już ich później ani nie przypominać, ani nawet nie wskazywać strony, na której zostały zdefiniowane, nie jest najszczęśliwszy i bardzo mi utrudniał lekturę. Oto przykład, nie jedyny: mało znane współczynniki „z gwiazdką”, opisujące pewne własności ideałów, zostały zdefiniowane na str. 20, a potem po raz pierwszy użyte bez żadnego komentarza na str. 94. Domyślam się, że wzięło to stąd, że większość rozprawy została skopiowana bez żadnych zmian z trzech artykułów, na których się opiera – tam oczywiście odległości pomiędzy wprowadzanimi oznaczeniami a ich użyciem są znacznie mniejsze. Lekturę utrudniał mi też piętrowy sposób definiowania pewnych pojęć (formalnie poprawny). Przykładem trudności, o których mówię, jest definicja klasy $\mathcal{AN}$, jednego z centralnych pojęć rozdziałów 3 i 4: ideał $\mathcal{I}$ należy do tej klasy, jeśli filtr $F = \mathcal{I}^*$ nie ma własności Nikodyma, co na mocy definicji tej własności oznacza, że jest nieprawdą, że na przestrzeni N_F nie ma pewnego ciągu miar. Chyba lepiej napisać po prostu, nawet w formie komentarza do tej definicji, że ideał $\mathcal{I}$ należy do $\mathcal{AN}$ wtedy i tylko wtedy, gdy na przestrzeni N_F jest ten ciąg miar.

Powyższe uwagi krytyczne nie zmieniają jednak mojego przekonania, że rozprawa mgra Tomasza Żuchowskiego „O ciągach miar i ideałach w algebrach Boole’a” zawiera oryginalne rozwiązania problemów naukowych, a także wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną jej autora oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. W mojej ocenie z pewnością spełnia ona wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce”, a także wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie mgra Żuchowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


Piotr Zakrzewski