Streszczenie

W niniejszej rozprawie zajmujemy się badaniem splotowych półgrup miar probabilistycznych na grupie Heisenberga $\mathbb{H}^n$, która jest rozmaitością $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ z mnożeniem

$$xy = (x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)).$$

Półgrupy takie były już badane w literaturze, również w szerszym kontekście grup nilpotentnych, między innymi przez matematyków wrocławskich.

Półgrupy miar na grupie Heisenberga są scharakteryzowane przez swoje funkcjonały generujące, które okazują się być dokładnie uogólnionymi laplasjanami. Uogólnione laplasjany na $\mathbb{H}^n$ są takie same jak uogólnione laplasjany na grupie abelowej $\mathbb{R}^{2n+1}$ i w ten sposób funkcjonały generujące splotowych półgrup miar na grupie abelowej możemy także rozpatrywać także w kontekście grupy Heisenberga.

W pracy rozważamy półgrupy, których funkcjonały generujące spełniają warunki dopuszczalności. Warunki te wyrażone są w terminach ich transformat Fouriera, tzn. związanych z nimi ciągłych funkcji ujemnie określonych. Przykładem dopuszczalnego uogólnionego laplasjanu jest

$$\langle \Gamma, f \rangle = c_n \int_{\mathbb{R}^{2n+1}\setminus\{0\}} \frac{f(x) - f(0)}{\|x\|^{\frac{2n+1}{2}}} K_{\frac{2n+1}{2}}(\|x\|)dx, \qquad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}),$$

gdzie K jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju. Mamy wtedy $-\widehat{\Gamma} = \log(1 + \|\xi\|^2)$, a w kontekście grupy abelowej Γ jest funkcjonałem generującym tzw. symetrycznej półgrupy gamma. W pracy podajemy również dość dużą klasę dopuszczalnych uogólnionych laplasjanów.

Niech P będzie funkcjonałem generującym półgrupy miar μ_t na grupie Heisenberga, a także funkcjonałem generującym półgrupy miar ν_t na grupie abelowej $\mathbb{R}^{2n+1}$. W pracy dowodzimy oszacowań różnicy transformat $\widehat{\mu_t} - \widehat{\nu_t}$ (oraz ich pochodnych) i pokazujemy, że są one małe ze względu na położenie $\xi \in \mathbb{R}^{2n+1}$ oraz czas $t > 0$. Prowadzi to do rezultatu będącego treścią głównego twierdzenia, mówiącego, że różnica miar μ_t i ν_t, zgadza się z funkcją k_t, która jest gładka poza zerem i dla $t < 1$ oraz wszystkich $N \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ spełnia

$$|\partial^\alpha k_t(x)| \leqslant \begin{cases} c_{n,\alpha} t^2 \|x\|^{-(2n+1)+2-|\alpha|} & \text{dla } \|x\| \leqslant 1, \\ c_{n,\alpha,N} t^2 \|x\|^{-N} & \text{dla } \|x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Jako wniosek otrzymujemy pewne warunki na to, by miary μ_t miały gęstości będące funkcjami w L^1, czy też w przestrzeni L^p. Powyższe oszacowania zastosowaliśmy także do badania punktowych oszacowań gęstości półgrup miar na grupie Heisenberga. W szczególności, dla uogólnionego laplasjanu Γ, możemy wywnioskować następujące oszacowania gęstości miar

$$v_t(x) \leqslant c_n t \|x\|^{-(2n+1)+2t}, \qquad \|x\| \leqslant 1, \ t < 1,$$

czy asymptotykę dla $t < 1$

$$v_t(x) \asymp t\|x\|^{-(2n+1)+2t}, \qquad \|x\| \to 0.$$

Jednym z najważniejszych narzędzi stosowanych przez nas w pracy jest rachunek symboliczny operatorów splotowych na grupie Heisenberga, który jest podobny do rachunku symbolicznego operatorów pseudoróżniczkowych. Istota rachunku symbolicznego opiera się na opisie działania $a\#b = (a^\vee * b^\vee)^\wedge$. Nieprzemienność działania $\#$ powoduje, że nie mamy już reguły Leibniza, która mówi jak obliczyć $\partial^\alpha(a\#b)$. W pracy znajdujemy precyzyjną "regułę Leibniza" dla grup nilpotentnych stopnia 2, jaką jest grupa Heisenberga.