Analiza harmoniczna i przestrzenie Hardy'ego w kontekście dunklowskim

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Teoria Dunkla jest uogólnieniem analizy fourierowskiej i teorii funkcji specjalnych związanym z systemami pierwiastków i grupami odbić. Operatory Dunkla T_j, wprowadzone przez Ch. Dunkla w 1989 roku, są zaburzeniami pochodnych kierunkowych przez operatory różnicowe. Okazały się one być kluczowym narzędziem używanym w badaniu funkcji specjalnych i pozwoliły na stworzenie podbudowy dla teorii funkcji specjalnych i transformat całkowych wielu zmiennych związanych z grupami odbić generowanymi przez systemy pierwiastków. W rozprawie rozważa się analizę harmoniczną i teorię przestrzeni Hardy'ego w tym kontekście.

Pierwszym celem rozprawy jest zbadanie, ulepszenie znanych, a także udowodnienie nowych oszacowań translacji Dunkla różnych funkcji (np. nieradialnych, ale dostatecznie regularnych), oraz wyrażenie ich w duchu analizy na przestrzeniach typu jednorodnego. Oszacowania tak wyrażone, użyteczne z punktu widzenia zastosowań do różnych zagadnień analizy harmonicznej, są wykorzystywane w rozprawie. W rozdziale 3 omawiamy zachowanie uogólnionego jądra ciepła $h_t(\mathbf{x},\mathbf{y})$ półgrupy ciepła generowanej przez operator Dunkla–Laplace'a $\Delta_k = \sum_{j=1}^{N} T_j^2$. Podajemy jego oszacowania w języku analizy na przestrzeniach typu jednorodnego z dwiema odległościami: odległością orbity punktu $\mathbf{x}$ od $\mathbf{y}$ oraz z dodatkowym czynnikiem $\left(1+\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{t}\right)^{-1}$, zawierającym metrykę euklidesową. Następnie wnioskujemy podobne wyniki dla dunklowskiego jądra Poissona, translacji Dunkla radialnych funkcji ciągłych o zwartym nośniku oraz jąder całkowych związanych z potencjałami Dunkla–Bessla.

W rozdziale 4 badamy różne rodzaje oszacowań translacji dunklowskich $\tau_{\mathbf{x}} f(-\mathbf{y})$ funkcji f (niekoniecznie radialnej). Najpierw dowodzimy twierdzenia 4.1, dotyczącego nośników translacji Dunkla funkcji z L^2. Następnie, przy użyciu tego twierdzenia i kilku wcześniejszych oszacowań, dowodzimy twierdzenia 4.8. Może być ono traktowane jako namiastka ograniczoności translacji Dunkla na L^1. Ograniczoność translacji na przestrzeniach L^p jest ważnym i wielokrotnie stosowanym elementem w klasycznej analizie harmonicznej. Jednak w kontekcie dunklowskim pytania o nią pozostają otwarte, a brak wiedzy na temat ograniczoności przesunięć stanowi poważną trudność w badaniu operatorów. Twierdzenie 4.8 łącznie z obserwacją, że dostatecznie regularna funkcja może być zapisana jako splot radialnej funkcji ϕ z funkcją f z L^1, pozwala na podanie metody użytecznej przy dowodzeniu oszacowań $\tau_{\mathbf{x}} g(-\mathbf{y})$ dla wielu nieradialnych jąder całkowych g. Okazała się ona być kluczowym elementem dowodów sporej liczby twierdzeń z rozdziałów 5, 6, 7, 8 i 9 dysertacji.

W części II rozprawy stosujemy oszacowania i metody omówione w części I w celu udowodnienia ograniczoności kilku dunklowskich odpowiedników operatorów znanych z klasycznej analizy harmonicznej. Rozważamy:

- słaby typ $(1,1)$ i ograniczoność na $L^p(dw)$ funkcji maksymalnych (rozdział 5);
- twierdzenie mnożnikowe Hörmandera dla transformaty Dunkla (rozdział 6);
- całki singularne typu splotowego (rozdział 7)
- górne i dolne oszacowania dla funkcji kwadratowych Littlewooda–Paley (rozdział 8);
- oszacowania jąder całkowych półgrup generowanych przez sumy parzystych potęg operatorów Dunkla, na przykład $-\sum_{j=1}^{N}(-1)^{\ell} T_j^{2\ell}$ (rozdział 9).

Część III jest poświęcona teorii przestrzeni Hardy'ego $H^1_{\Delta_k}$ w kontekście dunklowskim. W rozdziale 10 dowodzimy, że $H^1_{\Delta_k}$ może być scharakteryzowana poprzez rozkłady atomowe z atomami w sensie Coifmana–Weissa. Jako zastosowanie takiego rozkładu atomowego, podajemy wersję twierdzenia mnożnikowego Hörmandera na $H^1_{\Delta_k}$. Następnie, w rozdziale 11, budujemy teorię lokalnych przestrzeni Hardy'ego H^1_T, $T>0$ w kontekście dunklowskim, równoległą do klasycznej teorii Goldberga. Podajemy ich charakteryzację w terminach funkcji maksymalnych, rozkładów atomowych i transformat Riesza.

W części IV omawiamy teorię operatorów Dunkla Schrödingera $L = -\Delta_k + V(\mathbf{x})$ z potencjałami $V(\mathbf{x})$ z odpowiednich rewersyjnych klas Höldera. We rozdziale 12 badamy własności pomocniczej funkcji m i dowodzimy dunklowskiego odpowiednika nierówności Feffermana–Phonga. Następnie stosujemy wyniki uzyskane w rozdziale 12 do badania zachowania wartości własnych operatora L (w rozdziale 13) i przestrzeni Hardy'ego związanych z L (rozdział 14).

Wrocław, 22.02.2021

Agnieszka Hejna

Agnieszka Hejna