Streszczenie rozprawy doktorskiej

Stochastyczne metody punktu siodłowego w modelowaniu rezerw

mgr Agata Ilnicka

W rozprawie doktorskiej zatytułowanej „Stochastyczne metody punktu siodłowego w modelowaniu rezerw” podjęta została problematyka poszukiwania asymptotyk dla pewnych złożonych rozkładów. W pracy rozważana jest losowa suma

$$A = \sum_{j=1}^{N} U_j,$$

gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią a, natomiast $U_1, U_2, \ldots$ niezależnym od N ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie B. Zakładamy, że $U_1, U_2, \ldots$ przyjmują wartości nieujemne, całkowitoliczbowe. Problemem, który będziemy chcieli rozważać, jest pytanie o asymptotykę dla wyrażeń $\mathbb{P}(A = k)$ oraz $\mathbb{E}[\eta(N)|A = k]$, gdy $k \to \infty$, dla pewnej funkcji η. Posłużymy się stochastyczną metodą punktu siodłowego. W tym celu wprowadzimy klasę nowych miar probabilistycznych $\mathbb{P}^{(s)}$. Nowa miara jest wybrana w taki sposób, że dla dowolnej funkcji $\eta \geq 0$ zachodzi równość

$$\mathbb{E}[\eta(N)|A = k] = \mathbb{E}^s[\eta(N)|A = k].$$

W pracy przedstawione zostały propozycje asymptotyki wyrażone przy użyciu nowej miary probabilistycznej $\mathbb{P}^{(\theta)}$ definiowanej przez punkt siodłowy θ. Punkt siodłowy θ zostaje zdefiniowany jako rozwiązanie równania punktu siodłowego

$$\mathbb{E}^\theta A = k. \tag{1}$$

Szczegółowo rozważane są przypadki, gdy zmienne losowe U_j pochodzą z rozkładu o ograniczonym nośniku, a także z klasą rozkładów logarytmicznie wklęsłych. Przedstawiona zostaje hipoteza dotycząca poszukiwanej asymptotyki

$$\mathbb{E}[N|A = k] \sim \mathbb{E}^\theta N, \quad \text{gdy } \ k \to \infty,$$

gdzie θ jest punktem siodłowym, rozwiązującym równanie (**??**). Rozważane są również przykłady, dla konkretnych rozkładów.

W drugiej części pracy przedstawiona została koncepcja stochastycznego modelu wyceny rezerw, która stanowiła motywację do badania asymptotyk dla wspomnianych losowych sum. Rozważany jest następujący model, w którym N jest niejednorodnym procesem Poissona opisującym momenty pojawiania się szkód. W chwili T_i pojawienia się szkody uruchamiany jest proces X_i opisujący rozwój szkody:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{M_i(t)} C_{ij},$$

gdzie M_i jest niejednorodnym procesem Poissona opisującym momenty kolejnych wypłat ze szkody, która zaszła w chwili T_i, a C_{ij} to zmienne losowe odpowiadające wartościom kolejnych wypłat z danej szkody. Skumulowana wartość wypłat do chwili t ze szkód powstałych w pierwszym roku wyrażona jest poprzez:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(1)} X_i(t - T_i).$$

Zaproponowane zostały predyktory wartości rezerw w postaci warunkowej wartości oczekiwanej, a także predyktory oparte na kwantylach w odpowiednim rozkładzie warunkowym. Stąd istotnym punktem badań była analiza następującej warunkowej wartości oczekiwanej

$$\mathbb{E}\left[N(1) \middle| \sum_{j=1}^{N(1)} W_j = k \right], \tag{2}$$

gdzie każda zmienna losowa W_i pochodzi z mieszanego rozkładu Poissona z parametrem $b(t - T_i)$, gdzie T_i jest zmienną losową jw. Do wyznaczenia aproksymacji dla powyższej warunkowej wartości oczekiwanej wykorzystane zostały metody pokazane w pierwszej części pracy.

W ostatniej części pracy zostały zaproponowane metody numeryczne pozwalające na wykonanie obliczeń dla wyrażeń rozważanych w zaproponowanym modelu opisywanym w trzecim rozdziale rozprawy doktorskiej. W tym celu zaproponowana została metoda szybkiej transformaty Fouriera. Pokazane zostało, w jaki sposób zastosować transformatę w rozważanym przypadku. Ponadto wykonano obliczenia dla konkretnych przykładów. Wyniki uzyskane w następstwie obliczeń numerycznych zostały również skonfrontowane z proponowanymi hipotezami dotyczącymi przybliżeń poszczególnych wartości.