

Streszczenie

Badania właściwości rozkładów ekstremów procesów stochastycznych przyciągają coraz większą uwagę w najnowszej literaturze. Badania te są motywowane zarówno teoretycznymi aspektami teorii wartości ekstremalnych, jak i problemami matematyki stosowanej, w tym finansami, fizyka, teoria ryzyka i teoria kolejek. W ostatnich latach asymptotyczne zachowanie różnych funkcjonałów procesów stochastycznych było intensywnie badane zarówno dla modeli gaussowskich, jak i modeli Lévy'ego, które opisują szeroką klasę zjawisk i wymagają różnych technik dowodowych opartych na specyficznych właściwościach każdej z tych klas.

Wczesne badania koncentrowały się głównie na jednowymiarowych problemach dla funkcjonałów supremum, infimum i sojourn-time. Współczesne prace kładą nacisk na rozwój metod dla ogólnych funkcjonałów procesów stochastycznych, często wielowymiarowych, oraz na ekstremach w losowych horyzontach czasowych.

W najbardziej ogólnej postaci, problemy analizowane we wspomnianej literaturze można sformułować jako badanie

$$\mathbb{P}\{\Theta(\{X(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in E\}) \in K_u\},$$

gdzie $\{X(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d\}$ jest procesem stochastycznym lub polem, $E \subset \mathbb{R}^d$, $\Theta(\cdot)$ jest funkcjonałem o wartościach w $\mathbb{R}^q$, oraz gdzie $K_u \subset \mathbb{R}^q$ jest rodzina zbiorów zależnych od u (zwykle $K_u = [u, \infty)$) prowadzących do zdarzeń rzadkich, dla których powyższe prawdopodobieństwo dąży do zera, gdy u dąży do nieskończoności.

Analiza ekstremów każdej ze wspomnianych klas procesów wymaga odrębnych technik. Badanie procesów gaussowskich opiera się na technikach inspirowanych lematem Pickandsa, metodzie podwójnej sumy oraz nierówności Borell-TIS, a także nierównościami porównawczymi (np. nierówności Slepiana, Gordona i Sudakova-Fernique'a), podczas gdy badanie procesów Lévy'ego opiera się

miedzy innymi na teorii Dooba, zastosowaniu czasów zatrzymania, własności Markowa, technice wykładniczej zamiany miary i faktoryzacji Wienera-Hopfa.

Niniejsza rozprawa doktorska bada konkretne problemy związane z modelami ryzyka i kolejek. Wprowadza nowe techniki, takie jak uogólnienie lematu Breimana, i rozwija znane metody dowodzenia wyników w różnych problemach matematyki stosowanej. W szczególności, w rozprawie:

1. Oszacowano asymptotyczne zachowanie prawdopodobieństwa skumulowanej paryskiej ruiny dla skorelowanego ruchu Browna z dryfem w reżimie wielu źródeł.
2. Wyznaczono asymptotyke prawdopodobieństwa przepełnienia bufora dla stacjonarnych kolejek gaussowskich zasilanych ułamkowym ruchem Browna w losowym przedziale czasu $[0, \mathcal{T}_u]$, gdzie $\mathcal{T}_u$ jest nieujemna zmienna losowa, która może zależeć od u .
3. Wyprowadzono asymptotyke ogona dla szerokiej klasy funkcjonałów stacjonarnych kolejek Lévy z lekkoogonowym wejściem; dowód opiera się na słynnym lemacie Breimana.
4. Rozszerzono wersję lematu Breimana udowodnioną przez Fougères & Mercadier na iloczyny macierzy losowych i wektorów losowych indeksowanych przez u (i ewentualnie dodatkowo przez parametr τ_u) i zastosowano ten wynik do wyprowadzenia asymptotyki dla kilku modeli gaussowskich. W szczególności, przedstawiono niezależne dowody słynnych lematów Pickandsa i Piterbarga, jak również jednostajnego lematu Pickandsa dla funkcjonałów pól gaussowskich. Uzyskane wyniki uogólniają poprzednie na szeroką klasę zbiorów postaci $u + \frac{1}{u} \log(K)$, podczas gdy wyniki znane w literaturze obejmowały wyłącznie szczególny przypadek $K = [1, \infty)$. Dodatkowo, wyznaczono dokładną asymptotyke supremum samonormalizowanych procesów gaussowskich, które są związane z mostem Gamma i procesami gaussowskimi o losowej wariancji.