

Abstrakt

Głównymi tematami niniejszej rozprawy są ciągi miar na algebrach Boole’a oraz ich związki z ideałami. Zagadnienia te leżą na pograniczu teorii mnogości i teorii miary.

Studiujemy *własność Nikodyma* algebr Boole’a, która mówi że każdy punktowo ograniczony ciąg miar na $\mathcal{A}$ jest normowo ograniczony. Definicja ta jest motywowana klasycznym wynikiem Nikodyma i Andô, mówiącym że σ -zupełne algebry mają tę własność. Wiadomo, że jeśli przestrzeń Stone’a $St(\mathcal{A})$ zawiera nietrywialny ciąg zbieżny, to $\mathcal{A}$ nie może mieć własności Nikodyma. Przykład ten motywuje rozważanie klasy prostych przestrzeni topologicznych $N_{\mathcal{F}}$ związanych z filtrami $\mathcal{F}$ na ω . Badamy klasę takich filtrów, dla których na przestrzeni $N_{\mathcal{F}}$ istnieje ciąg miar o skończonych nośnikach o pewnych konkretnych własnościach (związanych z własnością Nikodyma), i dowodzimy, że dla każdego takiego filtra $\mathcal{F}$, jeśli $N_{\mathcal{F}}$ zanurza się homeomorficznie w przestrzeń Stone’a $St(\mathcal{A})$ danej algebry, to $\mathcal{A}$ nie ma własności Nikodyma. Charakteryzujemy dualną klasę $\mathcal{AN}$ ideałów na ω w terminach ideałów gęstościowych, i korzystając z tego dowodzimy, że $\mathcal{I} \in \mathcal{AN}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ zawiera się w pewnym ideale sumowalnym. Badamy także strukturę kofinalną klasy $\mathcal{AN}$ uporządkowanej względem porządku Katětova $\leq_K$, który jest ważnym narzędziem do porównywania złożoności strukturalnej ideałów i filtrów na ω .

Rozważamy również *własność Grothendiecka* algebr Boole’a, która wywodzi się z teorii przestrzeni Banacha i jest blisko związana z własnością Nikodyma—niełatwo jest znaleźć algebrę mającą dokładnie jedną z tych własności. Dla ideału $\mathcal{I}$ w σ -zupełnej algebrze Boole’a $\mathcal{A}$ pokazujemy, że jeśli podalgebra Boole’a $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ generowana przez $\mathcal{I}$ nie ma własności Nikodyma, to $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ nie ma również własności Grothendiecka. Konstruujemy rodzinę mocy $\mathfrak{c}$ parami nieizomorficznych podalgebr Boole’a algebry $\mathcal{P}(\omega)$ postaci $\mathcal{P}(\omega)(\mathcal{I})$, które – rozważane jako podzbiory przestrzeni Cantora 2^ω – należą do klasy borelowskiej $\mathbb{F}_{\sigma\delta}$ i mają własność Nikodyma, lecz nie mają własności Grothendiecka, oraz rodzinę mocy $2^{\mathfrak{c}}$ parami nieizomorficznych, nieborelowskich algebr Boole’a postaci $\mathcal{P}(\omega)(\mathcal{I})$ z własnością Nikodyma, lecz bez własności Grothendiecka. Głównym narzędziem używanym w dowodach tych wyników jest nowa charakteryzacja własności Nikodyma dla algebr Boole’a $\mathcal{P}(\omega)(\mathcal{I})$ za pomocą ciągów miar nieujemnych. Badamy również relacje między różnymi pojęciami ograniczoności ideałów na ω a własnością Nikodyma. W tym kontekście analizujemy tzw. ideały hipergrafowe, kończąc konstrukcją rodziny mocy $\mathfrak{c}$ parami nieizomorficznych ideałów hipergrafowych, które nie są całkowicie ograniczone, lecz mają własność Nikodyma.

W ostatniej części rozprawy badamy problemy kombinatoryczne związane z lematem Rosenthala, który jest ważnym wynikiem dotyczącym ciągów miar na algebrach Boole’a (w szczególności, jest kluczowy w dowodzie twierdzenia Grothendiecka że wszystkie σ -zupełne algebry Boole’a mają własność Grothendiecka). Kombinatorycznym jądrem lematu Rosenthala jest twierdzenie że $[\omega]^\omega$ jest *rodziną Rosenthala*. Istnieje związek rodzin Rosenthala ze zbiorami wolnymi, gdzie mówimy że zbiór $A \in [\omega]^\omega$ jest *wolny dla funkcji* $f \in \omega^\omega$ jeśli $f[A] \cap A$ jest skończony. Funkcje z ω w ω bez punktów stałych są również pozwiązane z rodzinami Rosenthala, ponieważ odpowiadają macierzom Rosen-

thala złożonym z zer i jedynek. Dla klasy funkcji $\Gamma \subseteq \omega^\omega$ bez punktów stałych definiujemy $\mathbf{ros}_\Gamma$ jako najmniejszą moc rodziny $\mathcal{A} \in [\omega]^\omega$ takiej że dla każdego $f \in \Gamma$ istnieje zbiór $B \in \mathcal{A}$ wolny dla f , oraz Δ_Γ jako najmniejszą moc rodziny $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$, takiej że dla każdego $A \in [\omega]^\omega$ istnieje $f \in \mathcal{F}$, dla którego A nie jest wolny. Dowodzimy ograniczeń górnych i dolnych dla różnych wersji tych niezmienników kardynalnych za pomocą klasycznych niezmienników kardynalnych continuum. W niektórych przypadkach, ograniczenia te są wynikami niesprzecznościowymi dowodzonymi za pomocą metody forsingu.