Studia Doktoranckie Inst. Mat. UWr. Egz. Wst. 5 VI 2009

1. Niech $\{B_1(t); t \geq 0\}$, $\{B_2(t); t \geq 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna.
a) Znaleźć wszystkie $A \in \mathbb{R}$, dla których

$$W(t) = \begin{cases} B_1(t) & \text{dla } t \in [0,T] \\ \\ B_1(T) - 4B_2(A(t-T)) & \text{dla } t > T \end{cases}$$

jest standardowym ruchem Browna.
b) Znaleźć rozkład graniczny $\frac{B_1(n^2)}{n}$, gdy $n \to \infty$.
c) Wyznaczyć C taką, że

$$P\left(\frac{B_1(2009^2)}{2009} > 2008\right) = CP\left(\frac{(B_2(2009))^2}{2009} > (2008)^2\right).$$

Odpowiedzi uzasadnić.

2. Proces stochastyczny $\{X(t); t \geq 0\}$ nazywamy stochastycznie ciągłym, gdy dla każdego $t_0 \in [0, \infty)$ oraz każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to t_0} P(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) = 0.$$

a) Czy proces Poissona jest stochastycznie ciągły?
b) Niech $\{X(t); t \geq 0\}$, $\{Y(t); t \geq 0\}$ będą dwoma stochastycznie ciągłymi procesami stochastycznymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Czy $\{X(t) + Y(t); t \geq 0\}$ jest stochastycznie ciągły?
Odpowiedzi uzasadnić.

3. Znaleźć nieobciążony estymator parametru μ o minimalnej wariancji na podstawie $n-$elementowej próby prostej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład $N(\mu, \sigma^2)$ o znanym σ^2. Odpowiedź uzasadnić.

4. Rozważamy podprzestrzeń $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ gdzie A_n są odcinkami

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2^{-n}, 0 \leq y \leq 1\},$$

a B_n są łukami

$$B_n = \{(\rho, \phi) : \rho = 2^{-n}, \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 2\pi\}$$

określonymi we współrzędnych biegunowych (ρ, ϕ). Zbadać, czy X jest przestrzenią spójną i metryzowalną w sposób zupełny.

5. Rodzinę $\mathcal{P}$ podzbiorów zbioru X nazywamy *pokryciem* zbioru X, gdy $\bigcup \mathcal{P} = X$; pokrycie $\mathcal{P}$ jest *istotnie nieskończone*, gdy nie zawiera pokrycia skończonego. Załóżmy, że X ma pokrycie istotnie nieskończone. Udowodnić, że X ma maksymalne pokrycie istotnie nieskończone $\mathcal{P}_0$. Pokazać, że $\mathcal{P}_0$ ma następujące własności:

$$H_1, H_2 \notin \mathcal{P}_0 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \notin \mathcal{P}_0$$
$$(H \notin \mathcal{P}_0 \quad \text{i} \quad H \subset G) \Rightarrow G \notin \mathcal{P}_0$$

6. Zadanie dotyczy rzeczywistych funkcji harmonicznych.
(1) Skonstruować niezerową funkcję harmoniczną określoną na całej płaszczyźnie, zerującą się w punktach $(0,0)$, $(1,0)$ oraz $(0,1)$.
(2) Czy niezerowa funkcja harmoniczna w całej płaszczyźnie może zerować się tylko w skończenie wielu punktach ?
(3) Czy niezerowa funkcja ciągła w domkniętej górnej półpłaszczyźnie i harmoniczna w otwartej górnej półpłaszczyźnie może zerować się tylko na niepustym zbiorze skończenie wielu punktów ?

7. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny oraz $a_n > 0$. Pokazać, że istnieje ciąg rosnący b_n, rozbieżny do nieskończoności, taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

8. Udowodnij, że niezerowy element pierscienia $\mathbf{Z}[\sqrt{35}]$ należy jedynie do skończenie wielu ideałów tego pierscienia.

9. Udowodnij, że nie istnieje na $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ metryka zgodna z topologią i spełniająca warunek: dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ i dowolnej macierzy A o wyznaczniku 1 (rozmiaru 2×2, o wyrazach rzeczywistych) $d(a,b) = d(Aa, Ab)$.

10. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbf{R}$, zaś $\phi : V \times V \times V \mapsto \mathbf{R}$ funkcją 3-liniową. Załóżmy, że dla dowolnych $a, b \in V$ zachodzi $\phi(a,a,b) = \phi(a,b,a) = 0$. Uzasadnij, że dla dowolnych $a, b, c \in V$ zachodzi wzór $\phi(a,b,c) = \phi(c,a,b)$.