Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocławski
TEST KWALIFIKACYJNY NA STUDIA DOKTORANCKIE
Wrocław, 10 czerwca 2013.

**Zadanie 1.** Dana jest funkcja:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2y^2)^\alpha}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**(a)** Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f$ jest ciągła?
**(b)** Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f$ ma wszystkie pochodne kierunkowe w punkcie (0,0)?
**(c)** Udowodnij, że dla $\alpha > 3/4$ funkcja $f$ jest różniczkowalna w $(0,0)$.

**Zadanie 2.**
**(a)** Sformułuj twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji wielomianami lub twierdzenie Stone'a-Weierstrassa.
**(b)** Udowodnij, że funkcje ciągłe na odcinku [0,1] można jednostajnie aproksymować funkcjami postaci

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{2k},$$

to jest wielomianami od zmiennej $x^2$.
**(c)** Na przedziale $[0,1]$ dana jest funkcja ciągła $f$ taka, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ...$ zachodzi

$$\int_0^1 f(x) x^{2k}\, dx = 0.$$

Udowodnij, że $f$ jest tożsamościowo równa 0.
**(d)** Wykaż, że funkcje ciągłe na odcinku $[\frac{1}{2}, 1]$ można jednostajnie aproksymować wielomianami postaci

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} x^{2k+1},$$

to jest wielomianami mającymi tylko nieparzyste potęgi $x$.

**Zadanie 3.** Dane są względnie pierwsze liczby naturalne $p, q$ oraz podgrupa $H < \mathbb{Z}^2$ generowana przez element $(p, q)$ (gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza addytywną grupę liczb całkowitych).
**(a)** Wskaż (wraz z uzasadnieniem) pewien homomorfizm $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, którego jądrem jest $H$.
**(b)** Uzasadnij (np. korzystając z **(a)**), że grupa ilorazowa $\mathbb{Z}^2/H$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$.

**Zadanie 4.** W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ dana jest $n$-wymiarowa kostka $[0,1]^n$. Niech $B$ oznacza kulę w $\mathbb{R}^n$ styczną zewnętrznie do wszystkich $2^n$ kul o promieniu $\frac{1}{2}$ i o środkach w wierzchołkach tej kostki.

**(a)** Uzasadnij, że środkiem kuli $B$ jest punkt $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.
**(b)** Rozstrzygnij, dla jakich $n$ kula $B$ zawiera się w powyższej kostce.

**Zadanie 5.** Zbiór Cantora $C$, jako przestrzeń topologiczna, jest jednoznacznie wyznaczony przez następujące trzy własności:

(i) $C$ jest zwartą przestrzenią metryczną;
(ii) $C$ nie posiada punktów izolowanych (tzn. każdy punkt z $C$ jest punktem skupienia w $C$);
(iii) $C$ jest całkowicie niespójna, tzn. każdy punkt z $C$ posiada bazę otoczeń otwarto-domkniętych.

Uzasadnij, że każdy niepusty otwarto-domknięty podzbiór w $C$ jest homeomorficzny z $C$.

**Zadanie 6.** Niech $K$ będzie ciałem charakterystyki zero. Rozważmy przestrzeń wektorową $K^n$ nad ciałem $K$. Załóżmy, że wektory $w, v_1, \dots, v_k \in K^n$ mają wymierne współrzędne. Niech $V$ będzie podprzestrzenią w $K^n$ generowaną przez wektory $v_1, \dots, v_k$. Uzasadnij, że jeśli $w \in V$, to wektor $w$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $v_1, \dots, v_k$ o wymiernych współczynnikach.

**Zadanie 7.** Niech $X = (\sqrt{2}, +\infty) \setminus \mathbb{Q}$ a $Y = (0, +\infty) \setminus \mathbb{Q}$ (tutaj $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych). Niech

$$\mathcal{F} = \{f \colon f \text{ jest bijekcją z } X \text{ na } Y\}.$$

Na $\mathcal{F}$ wprowadzamy relację równoważności

$$f \sim g \iff f(\pi) = g(\pi).$$

**(a)** Jaka jest moc przestrzeni ilorazowej $\mathcal{F}/\sim$ ?
**(b)** Jaka jest moc klas abstrakcji tej relacji?
**(c)** Podaj przykład elementu $\mathcal{F}$.

Odpowiedzi uzasadnij.

**Zadanie 8.** Rozpatrzmy losowe słowo składające się z $N$ liter pochodzących z czteroliterowego alfabetu $\mathcal{A} = \{A, G, C, T\}$. Przyjmijmy założenie o niezależności i jednakowości rozkładu pojawiania się poszczególnych liter w tym słowie. Tak więc, każda z liter alfabetu może pojawić się na wybranym miejscu słowa z prawdopodobieństwem $0,25$, niezależnie od sposobu obsadzenia pozostałych miejsc. Przez wzorzec długości $k$ będziemy rozumieli ustalony ciąg $k$ kolejnych liter. Niech $Y_N$ oznacza liczbę wystąpienia wzorca $CTT$ w rozpatrywanym słowie.

**(a)** Policz wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y_N$.
**(b)** Policz wariancję zmiennej losowej $Y_N$.

**Wskazówka.** *Przedstaw zmienną losową $Y_N$ w postaci sumy zmiennych zero–jedynkowych.*

**Zadanie 9.** Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną zero i niezerową, skończoną wariancją $\sigma^2$. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowanych jako

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2}},$$

jest zbieżny według rozkładu i podaj jego granicę.

**Zadanie 10.** Rzucamy monetą do momentu pojawienia się po raz pierwszy orła. Przy użyciu tej samej monety, powtarzamy ten eksperyment $n$ razy. Niech $p$ oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie tą monetą, natomiast $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ oznaczają momenty, w których pojawił się orzeł po raz pierwszy w kolejnych eksperymentach.

**(a)** Na podstawie realizacji próby $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, wyznacz estymator największej wiarogodności parametru $p$.

**(b)** Czy otrzymany w punkcie (a) estymator parametru $p$ jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym?

**(c)** Dla ustalonej wartości $k \geq 1$ oznaczmy przez $\gamma_k$ prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na tym, że dla wyrzucenia po raz pierwszy orła potrzeba, co najmniej $k$ rzutów. Wyznacz estymator największej wiarogodności dla $\gamma_k$.